

CHƯƠNG III

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Lượng giác được phát triển từ nhu cầu tính toán góc và khoảng cách trong rất nhiều lĩnh vực như thiên văn học, lập bản đồ, bản vẽ thiết kế, khảo sát và tìm tằm bắn của pháo binh.

Ở lớp 9, ta đã biết tỉ số lượng giác của một góc nhọn. Chương này mở rộng khái niệm đó cho một góc bất kì từ 0° đến 180° .



Bài 5

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

THUẬT NGỮ

- Giá trị lượng giác của một góc
- Hai góc bù nhau
- Nửa đường tròn đơn vị

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

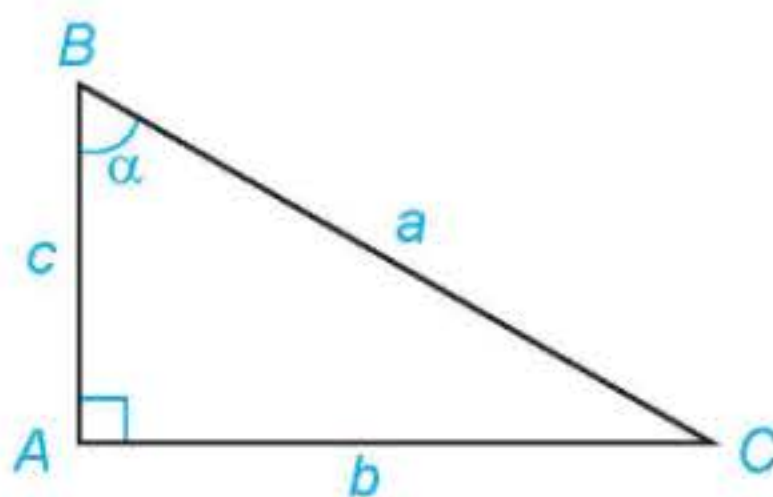
- Nhận biết giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .
- Giải thích hệ thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau, bù nhau.
- Sử dụng máy tính cầm tay để tính các giá trị lượng giác của một góc.
- Vận dụng giải một số bài toán có nội dung thực tiễn.

$$\sin \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cot \alpha = \frac{c}{b}$$



Hình 3.1

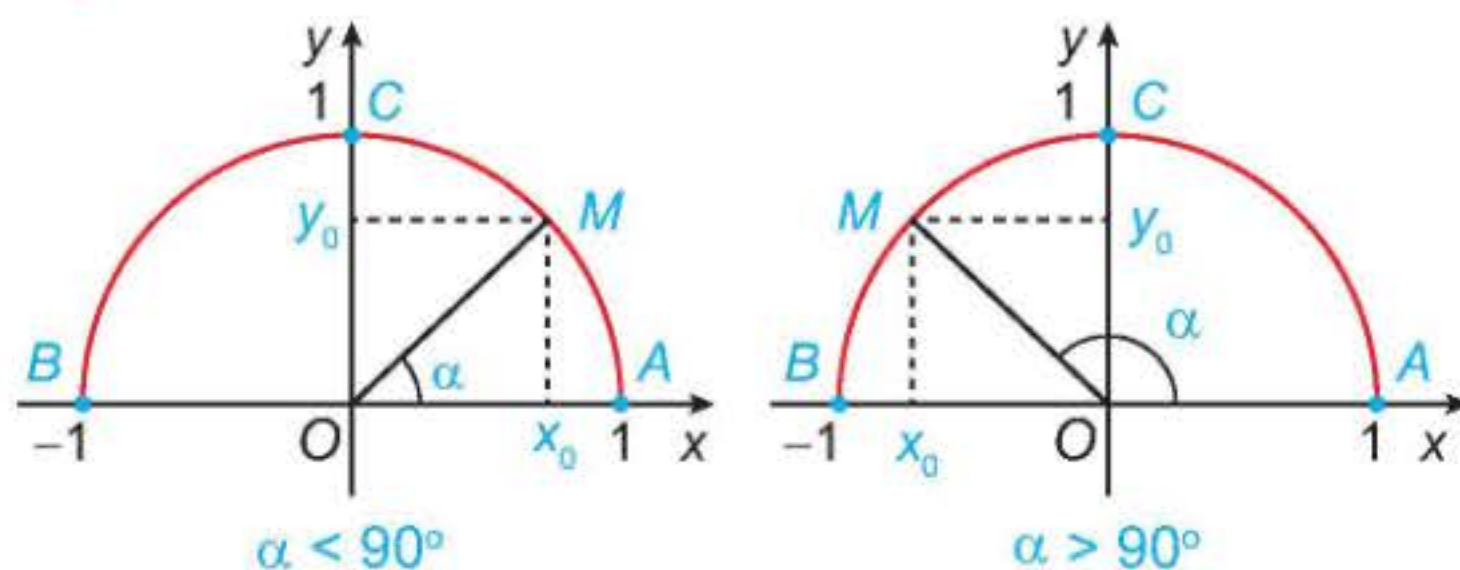
Bạn đã biết tỉ số lượng giác của một góc nhọn. Đối với góc tù thì sao?



1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành (H.3.2) được gọi là **nửa đường tròn đơn vị**.

Cho trước một góc α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Khi đó, có duy nhất điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị nói trên để $\widehat{xOM} = \alpha$.



Hình 3.2

HĐ1. a) Nêu nhận xét về vị trí của điểm M trên nửa đường tròn đơn vị trong mỗi trường hợp sau:

- $\alpha = 90^\circ$;
- $\alpha < 90^\circ$;
- $\alpha > 90^\circ$.

b) Khi $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, nêu mối quan hệ giữa $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ với hoành độ và tung độ của điểm M .

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn cho một góc bất kì từ 0° đến 180° , ta có định nghĩa sau:

Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Khi đó:

- **sin** của góc α là tung độ y_0 của điểm M , được kí hiệu là $\sin \alpha$;
- **côsin** của góc α là hoành độ x_0 của điểm M , được kí hiệu là $\cos \alpha$;
- Khi $\alpha \neq 90^\circ$ (hay là $x_0 \neq 0$), **tang** của α là $\frac{y_0}{x_0}$, được kí hiệu là $\tan \alpha$;
- Khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$ (hay là $y_0 \neq 0$), **côtang** của α là $\frac{x_0}{y_0}$, được kí hiệu là $\cot \alpha$.

Từ định nghĩa trên, ta có:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ); \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ \text{ và } \alpha \neq 180^\circ); \quad \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \quad (\alpha \notin \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ\}).$$

Sau đây là bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt mà em nên nhớ.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
GTLG						
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

Trong bảng, kí hiệu || chỉ giá trị lượng giác tương ứng không xác định.



Bảng 3.1

» **Ví dụ 1.** Tìm các giá trị lượng giác của góc 135° .

Giải (H.3.3)

Gọi M là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy .

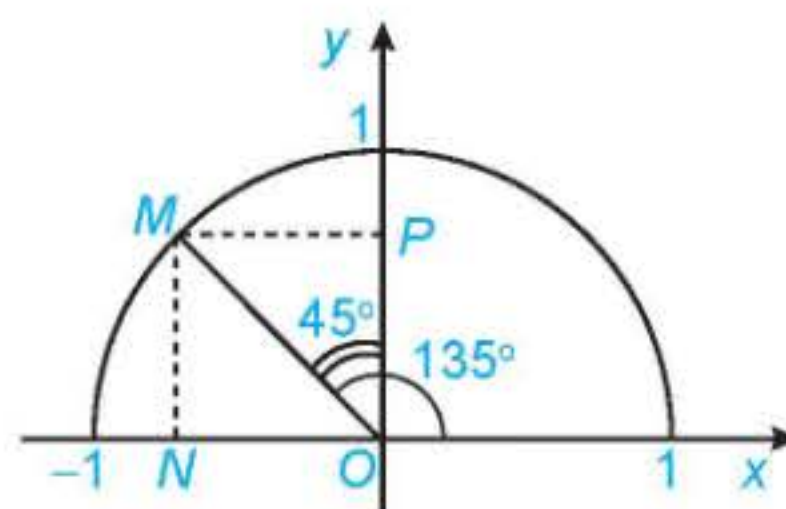
Vì $\widehat{xOM} = 135^\circ$ nên $\widehat{MON} = 45^\circ, \widehat{MOP} = 45^\circ$. Vậy các tam giác MON, MOP là vuông cân với cạnh huyền $OM = 1$.

Từ đó, ta có $ON = OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mặt khác, điểm M nằm bên trái trục tung nên có tọa độ là $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

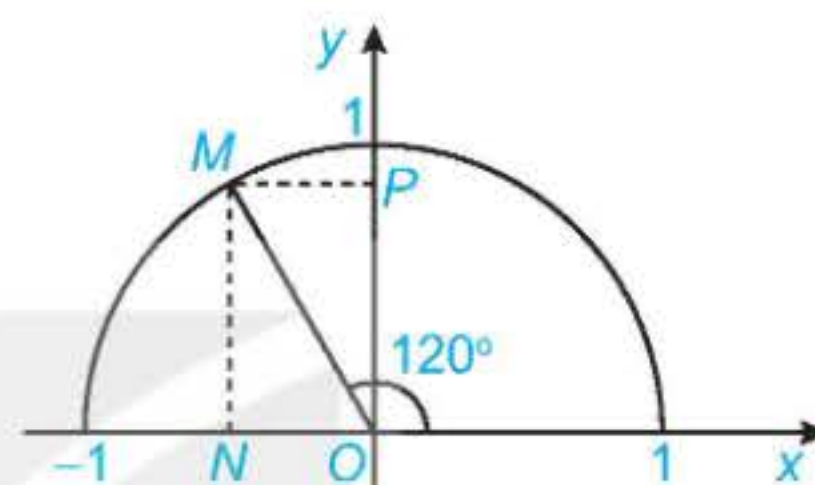
Theo định nghĩa, ta có:

$$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan 135^\circ = -1; \quad \cot 135^\circ = -1.$$



Hình 3.3



Hình 3.4

» **Luyện tập 1.** Tìm các giá trị lượng giác của góc 120° (H.3.4).

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính (đúng hoặc gần đúng) các giá trị lượng giác của một góc và tính góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó.

Chẳng hạn, với một loại máy tính cầm tay, sau khi mở máy ta bấm phím **SHIFT** **MODE** (SETUP) rồi bấm phím **3** để chọn đơn vị đo góc là “độ”. Sau đó tính giá trị lượng giác của góc hoặc tính góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó.

- Tính giá trị lượng giác của một số góc:



Tính	Bấm phím	Kết quả
$\sin 48^\circ 50' 40''$	sin 4 8 ° ' " 5 0 ° ' " 4 0 ° ' " =	$\sin 48^\circ 50' 40'' \approx 0,7529256291$
$\cos 112^\circ 12' 45''$	cos 1 1 2 ° ' " 1 2 ° ' " 4 5 ° ' " =	$\cos 112^\circ 12' 45'' \approx -0,3780427715$
$\tan 15^\circ$	tan 1 5 =	$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

- Tìm góc khi biết một giá trị lượng giác của góc đó:

Tìm x, biết	Bấm phím	Kết quả
$\sin x = 0,3456$	SHIFT sin (sin ⁻¹) 0 . 3 4 5 6 = ° ' "	$x \approx 20^\circ 13' 7''$

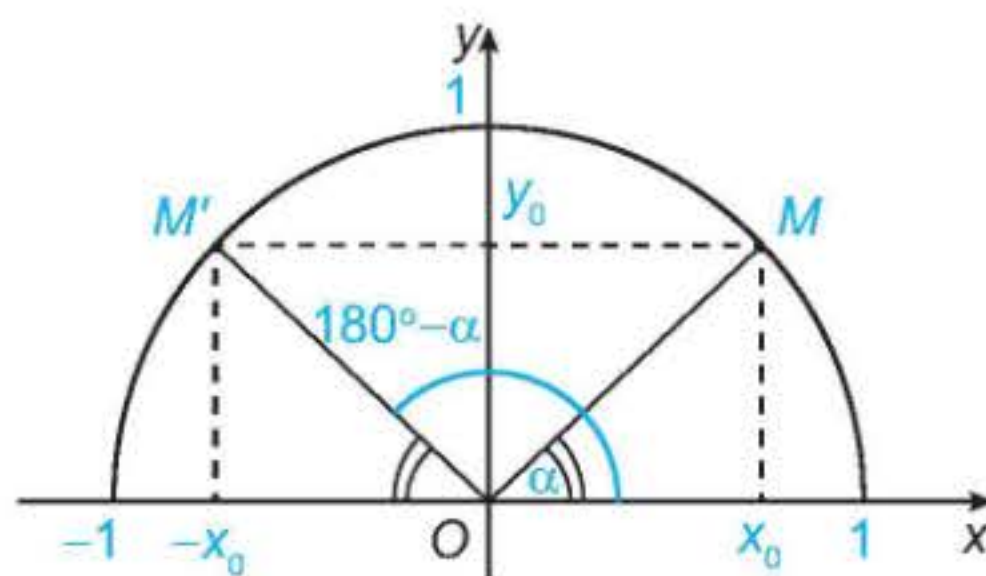
Chú ý

- Khi tìm x biết $\sin x$, máy tính chỉ đưa ra giá trị $x \leq 90^\circ$.
- Muốn tìm x khi biết $\cos x, \tan x$, ta cũng làm tương tự như trên, chỉ thay phím **sin** tương ứng bởi phím **cos**, **tan**.

2. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU

Ở lớp 9, em đã biết mối quan hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau. Trong mục này, em hãy tìm mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau.

Đối với một góc α tùy ý ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), gọi M, M' là hai điểm trên nửa đường tròn đơn vị tương ứng với hai góc bù nhau α và $180^\circ - \alpha$ ($\widehat{xOM} = \alpha, \widehat{xOM'} = 180^\circ - \alpha$) (H.3.5).



Hình 3.5

» **HĐ2.** Nêu nhận xét về vị trí của hai điểm M, M' đối với trục Oy . Từ đó, nêu các mối quan hệ giữa $\sin \alpha$ và $\sin(180^\circ - \alpha)$, giữa $\cos \alpha$ và $\cos(180^\circ - \alpha)$.

Đối với hai góc bù nhau, α và $180^\circ - \alpha$, ta có:

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$;
- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$);
- $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$).

» **Ví dụ 2.** Tính các giá trị lượng giác của các góc $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$.

Giải

Do các góc $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ tương ứng bù với các góc $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ nên từ Bảng 3.1, ta cũng có bảng các giá trị lượng giác sau:

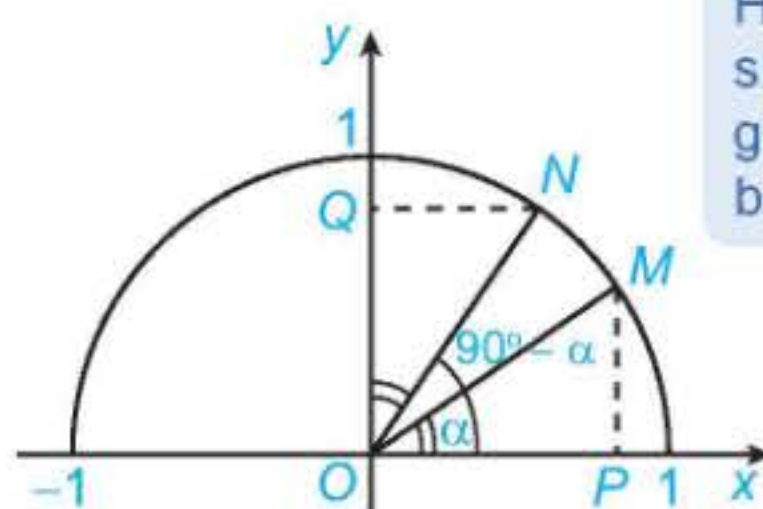
α	120°	135°	150°
GTLG			
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Bảng 3.2

Hai góc bù nhau có sin bằng nhau; có cosin, tang, cotang đối nhau.



» **Luyện tập 2.** Trong Hình 3.6, hai điểm M, N ứng với hai góc phụ nhau α và $90^\circ - \alpha$ ($\widehat{xOM} = \alpha, \widehat{xON} = 90^\circ - \alpha$). Chứng minh rằng $\triangle MOP = \triangle NOQ$. Từ đó nêu mối quan hệ giữa $\cos \alpha$ và $\sin(90^\circ - \alpha)$.

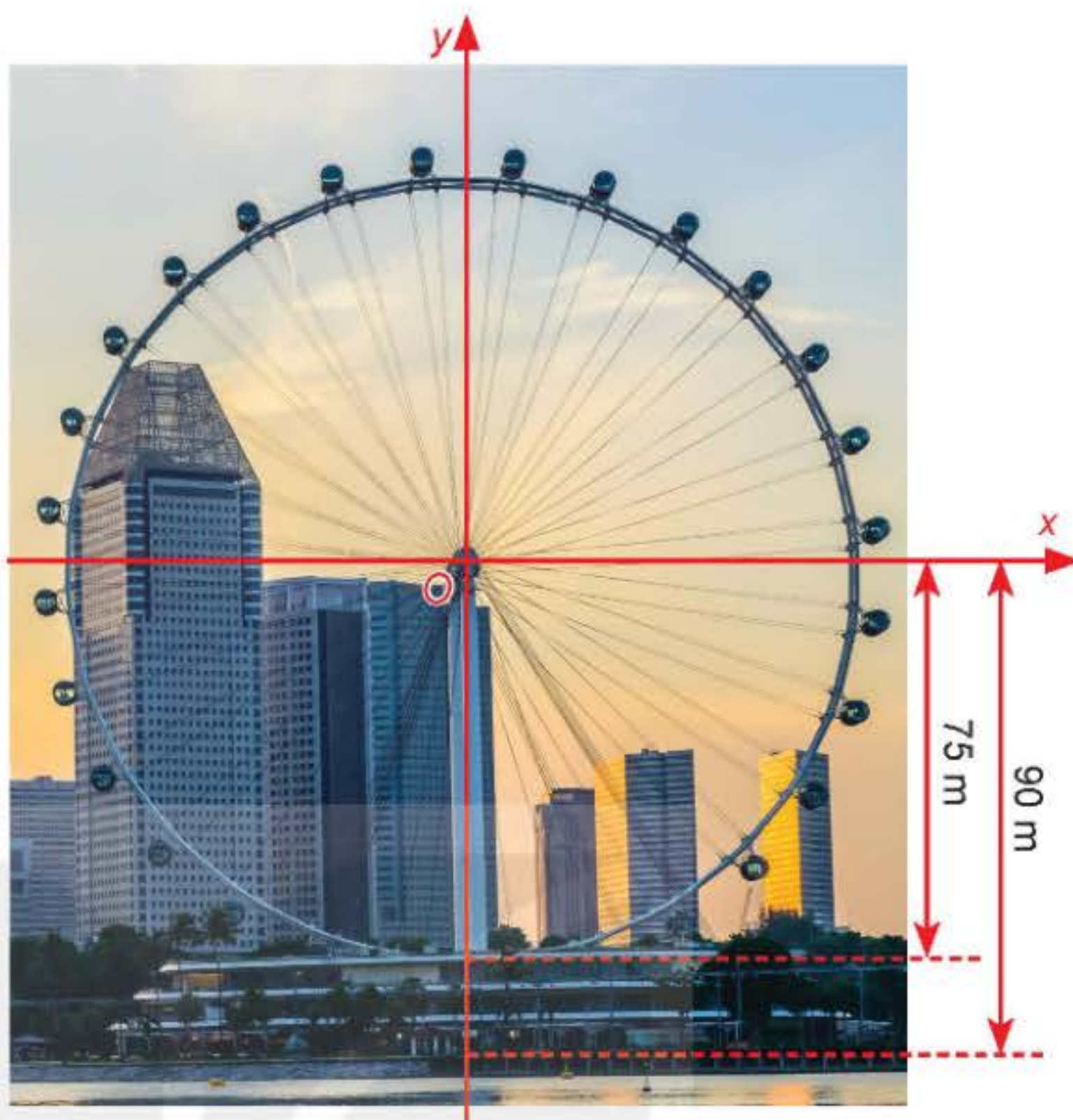


Hình 3.6

Hai góc phụ nhau có sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.



» **Vận dụng.** Một chiếc đu quay có bán kính 75 m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m (H.3.7), thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Hình 3.7

BÀI TẬP

3.1. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(2 \sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3 \tan 150^\circ) \cdot (\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$;

b) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$;

c) $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$.

Chú ý. $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$, $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$, $\tan^2 \alpha = (\tan \alpha)^2$, $\cot^2 \alpha = (\cot \alpha)^2$.

3.2. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $\sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$;

b) $2 \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cot \alpha - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \tan \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha)$, với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

3.3. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;

b) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ($\alpha \neq 90^\circ$);

c) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$).

3.4. Cho góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) thỏa mãn $\tan \alpha = 3$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}$.