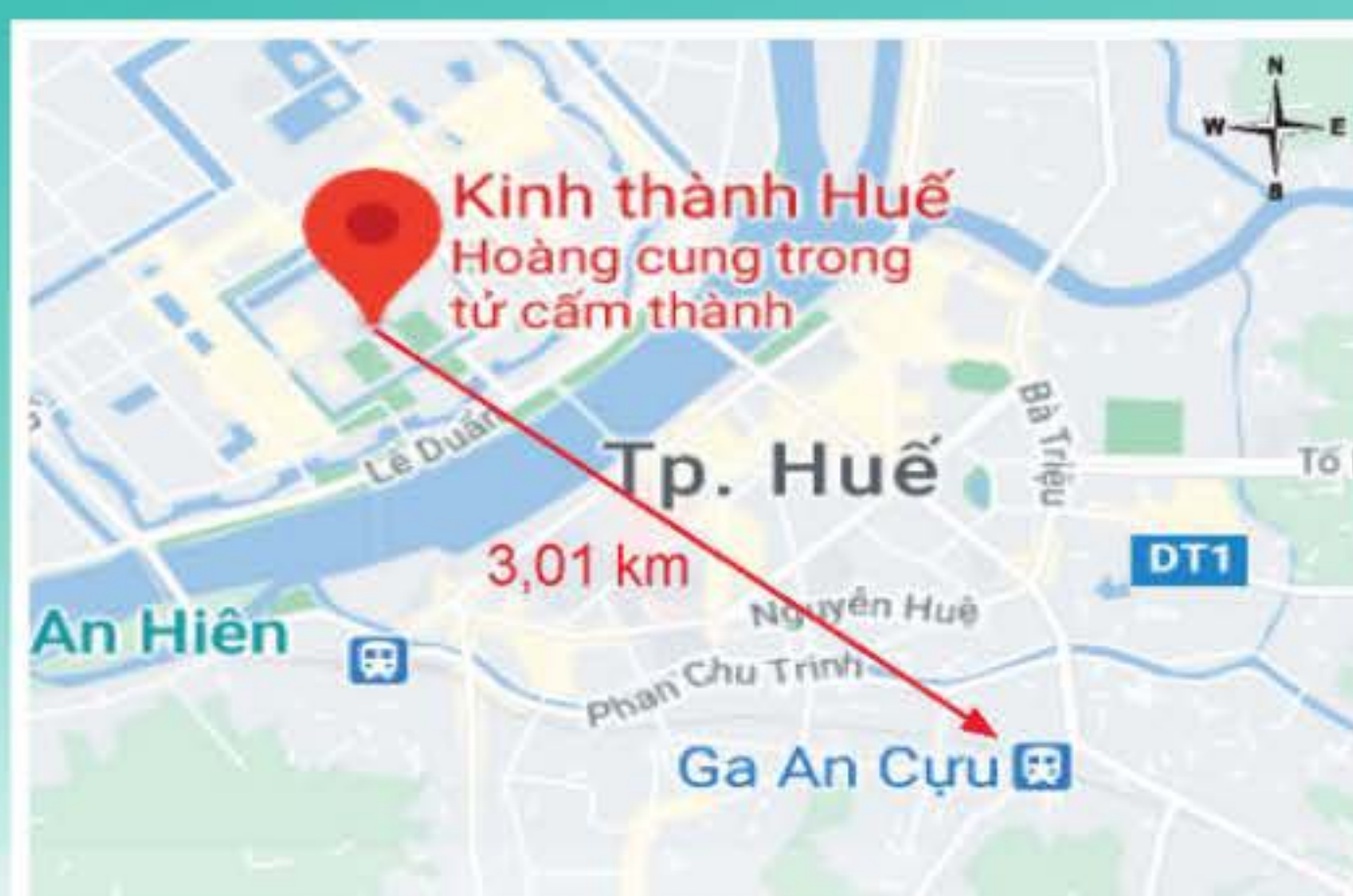


CHƯƠNG IV. VECTƠ

Hình 4.1 cho thấy ga An Cựu cách Hoàng cung Huế 3,01 km về hướng đông nam. Hai thông tin khoảng cách và hướng cho phép ta xác định được vị trí của ga An Cựu theo vị trí của Hoàng cung Huế.



Hình 4.1 (Theo Google Maps)

Một số đại lượng như lực, vận tốc cũng được đặc trưng bởi hai yếu tố là độ lớn và hướng. Chương này xây dựng một đối tượng toán học, được gọi là vectơ, mà ta có thể dùng nó để biểu diễn các đại lượng nói trên.

Vectơ còn được sử dụng để xây dựng các khái niệm toán học, là công cụ để giải quyết nhiều bài toán và góp phần vào việc hình thành và phát triển năng lực tư duy tuyến tính cho người học.

Bài 7

CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

THUẬT NGỮ

- Vectơ, vectơ-không
- Độ dài của vectơ
- Giá của vectơ
- Hai vectơ cùng phương
- Hai vectơ cùng hướng, ngược hướng
- Hai vectơ bằng nhau

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

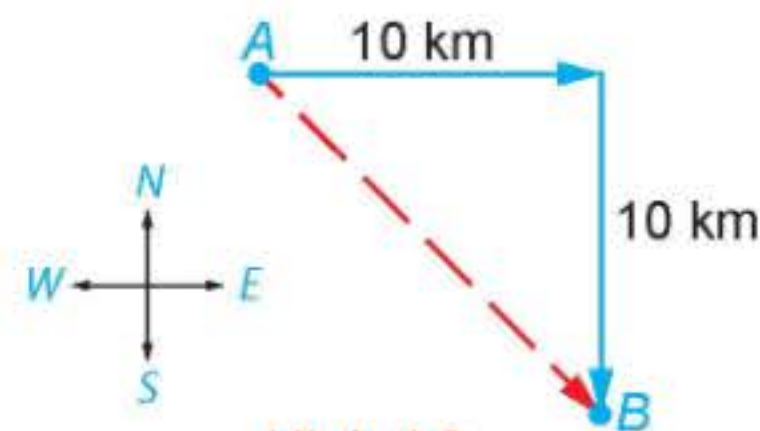
- Nhận biết khái niệm vectơ, hai vectơ cùng phương, hai vectơ cùng hướng, hai vectơ bằng nhau, vectơ-không.
- Biểu thị một số đại lượng như lực, vận tốc bằng vectơ.

Nhiệt độ và gió là hai yếu tố luôn cùng được đề cập trong các bản tin dự báo thời tiết. Tuy nhiên, nhiệt độ là đại lượng chỉ có độ lớn, còn gió có cả hướng và độ lớn. Với một đơn vị đo, ta có thể dùng số để biểu diễn nhiệt độ. Đối với các đại lượng gồm hướng và độ lớn như vận tốc gió thì sao? Ta có thể dùng đối tượng toán học nào để biểu diễn chúng?



1. KHÁI NIỆM VECTOR

» **H01.** Một con tàu khởi hành từ đảo A, đi thẳng về hướng đông 10 km rồi đi thẳng tiếp 10 km về hướng nam thì tới đảo B (H.4.2). Nếu từ đảo A, tàu đi thẳng (không đổi hướng) tới đảo B, thì phải đi theo hướng nào và quãng đường phải đi dài bao nhiêu kilômét?



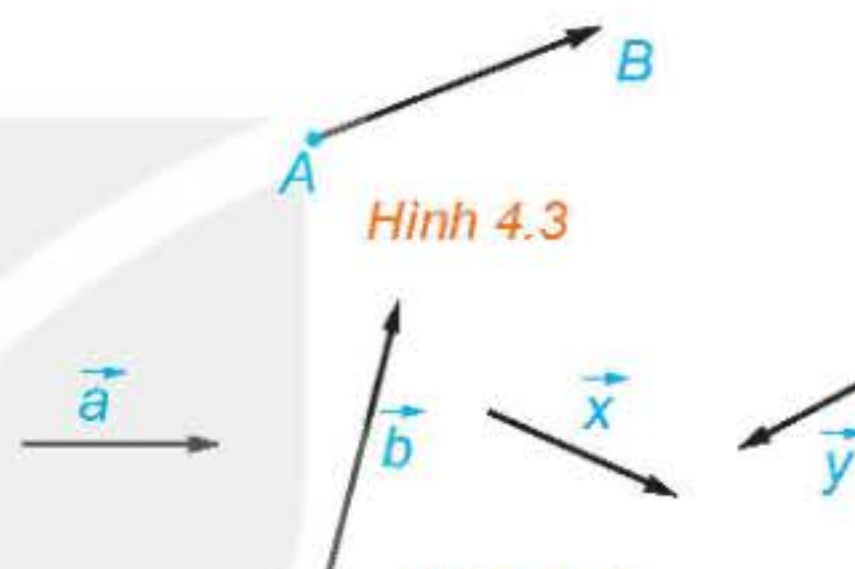
Hình 4.2

Ta có thể gán cho quãng đường thẳng từ đảo A tới đảo B đồng thời hai yếu tố, đó là độ dài và hướng (hướng đi thẳng từ đảo A tới đảo B). Từ thực tế này, ta đi tới khái niệm toán học sau:

- **Vector** là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- **Độ dài của vector** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vector đó.

Chú ý

- Vector có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là *vector AB* (H.4.3).
- Để vẽ một vector, ta vẽ đoạn thẳng nối điểm đầu và điểm cuối của nó, rồi đánh dấu mũi tên ở điểm cuối (H.4.3).
- Vector còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$ (H.4.4).
- Độ dài của vector $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$ tương ứng được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$.



Hình 4.3

Hình 4.4

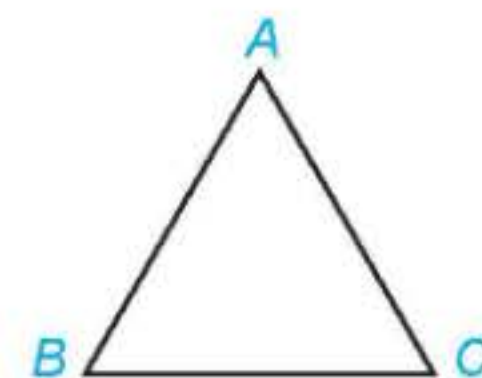
» **Ví dụ 1.** Cho hình vuông ABCD với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}$.

Giải

Vì cạnh của hình vuông ABCD có độ dài bằng 1 nên các đường chéo của hình vuông này có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2}, |\overrightarrow{CA}| = CA = \sqrt{2}, |\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{2}$.

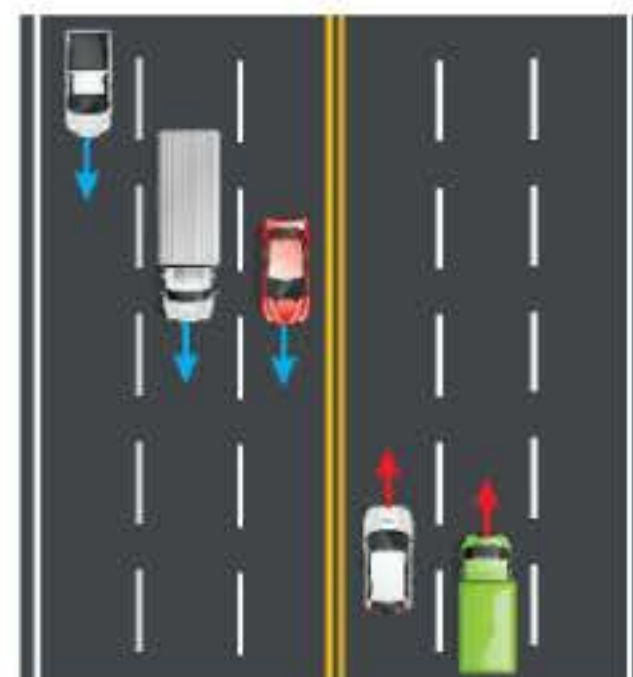
» **Luyện tập 1.** Cho tam giác đều ABC với cạnh có độ dài bằng a. Hãy chỉ ra các vector có độ dài bằng a và có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC.



2. HAI VECTOR CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG, BẰNG NHAU

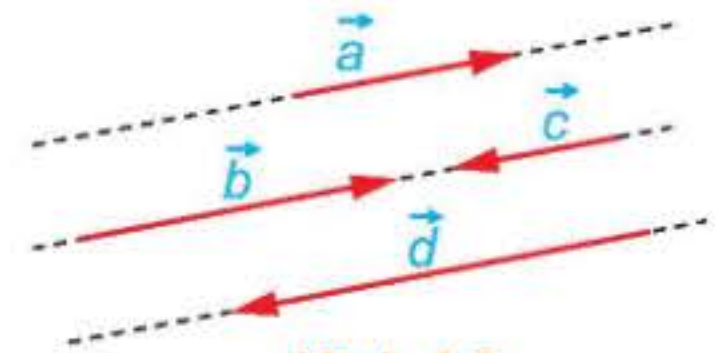
» **H02.** Quan sát các làn đường trong Hình 4.5 và cho biết những nhận xét nào sau đây là đúng.

- Các làn đường song song với nhau.
- Các xe chạy theo cùng một hướng.
- Hai xe bất kì đều chạy theo cùng một hướng hoặc hai hướng ngược nhau.



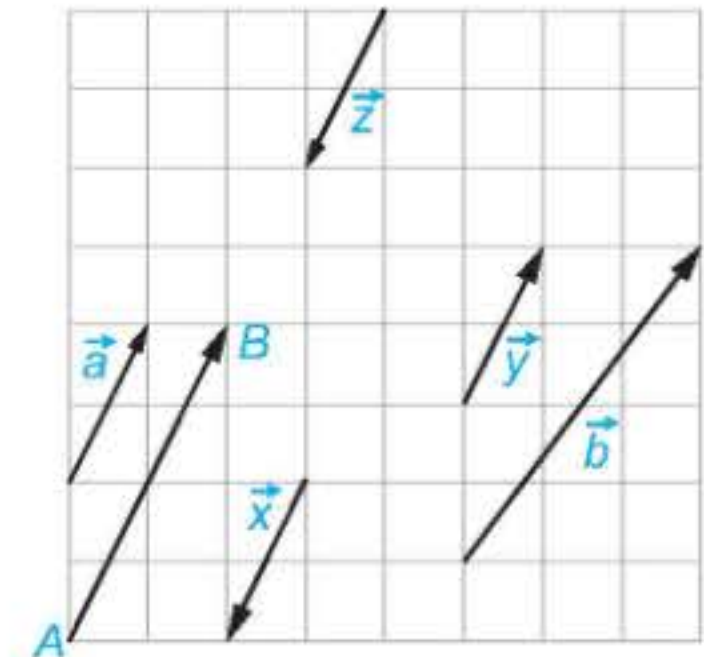
Hình 4.5

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vector được gọi là **giá** của vector đó.
- Hai vector được gọi là **cùng phương** nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.



Hình 4.6

Trong Hình 4.7, mỗi cặp vector trong các vector $\overline{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đều cùng phương, nhưng vector $\vec{b}$ không cùng phương với mỗi vector trên.



Hình 4.7

Đối với hai vector cùng phương thì chúng **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.

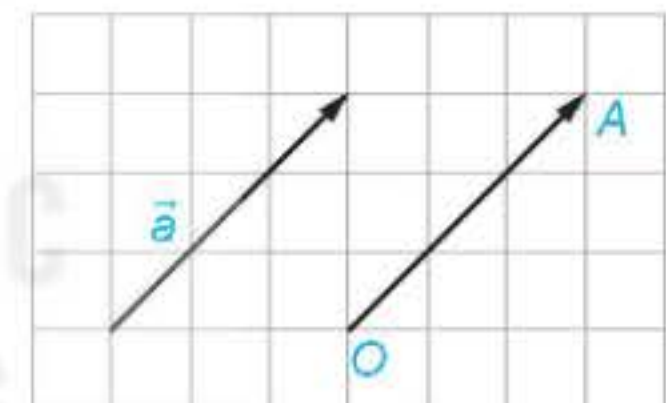
Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **bằng nhau**, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chỉ khi hai vector cùng phương, ta mới nói tới chúng cùng hướng hay ngược hướng.



Chú ý

- Ta cũng xét các vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau (chẳng hạn $\overline{AA}$, $\overline{BB}$, $\overline{MM}$), gọi là các **vector-không**.
- Ta quy ước vector-không có độ dài bằng 0, cùng hướng (do đó cùng phương) với mọi vector.
- Các vector-không có cùng độ dài và cùng hướng nên bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.
- Với mỗi điểm O và vector $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm A sao cho $\overline{OA} = \vec{a}$ (H.4.8).

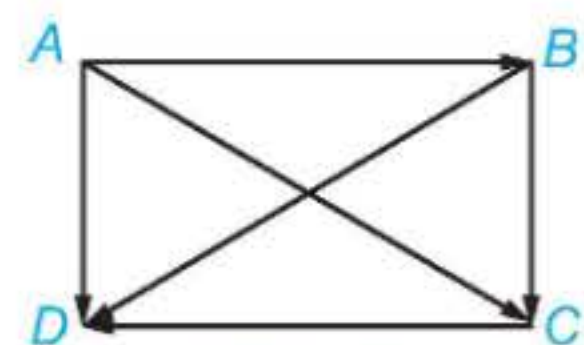


Hình 4.8

» **Ví dụ 2.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vector: $\overline{AD}$ và $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ và $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ và $\overline{BD}$. Những cặp vector nào trong các cặp vector trên là bằng nhau?

Giải (H.4.9)

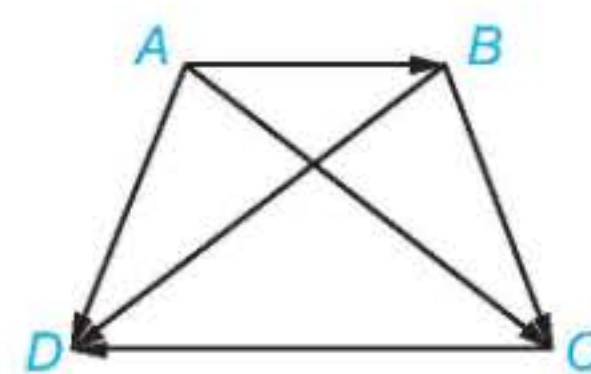
- Hai vector $\overline{AD}$ và $\overline{BC}$ có cùng độ dài và cùng hướng. Do đó, hai vector $\overline{AD}$ và $\overline{BC}$ bằng nhau.
- Hai vector $\overline{AB}$ và $\overline{CD}$ có cùng độ dài và ngược hướng. Do đó, hai vector $\overline{AB}$ và $\overline{CD}$ không bằng nhau.
- Hai vector $\overline{AC}$ và $\overline{BD}$ có cùng độ dài nhưng không cùng phương nên không cùng hướng. Do đó, hai vector $\overline{AC}$ và $\overline{BD}$ không bằng nhau.



Hình 4.9

Vậy trong các cặp vector đang xét, chỉ có cặp vector $\overline{AD}$ và $\overline{BC}$ là bằng nhau ($\overline{AD} = \overline{BC}$).

» **Luyện tập 2.** Cho hình thang cân $ABCD$ với hai đáy AB, CD , $AB < CD$ (H.4.10). Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vector $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Có cặp vector nào trong các cặp vector trên bằng nhau hay không?



Hình 4.10

» **Ví dụ 3.** Chứng minh rằng ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Giải

- Giả sử ba điểm A, B, C thẳng hàng. Khi đó, chúng cùng thuộc một đường thẳng d . Vậy hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ có cùng giá là d . Suy ra chúng cùng phương.
- Giả sử hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương. Khi đó, chúng có cùng giá hoặc có hai giá song song với nhau. Mặt khác, giá của các vector trên đều đi qua A nên chúng trùng nhau. Vậy A, B, C thẳng hàng.

Ta có thể dùng ngôn ngữ vector để biểu thị một số quan hệ hình học.



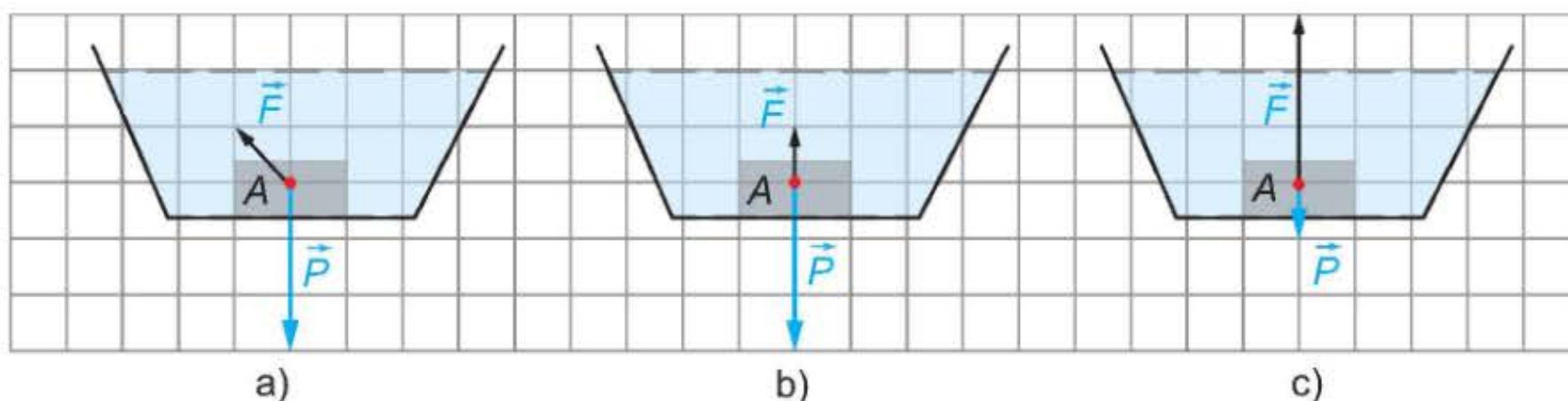
Nhận xét. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

» **Luyện tập 3.** Trong các điều kiện dưới đây, chọn điều kiện cần và đủ để một điểm M nằm giữa hai điểm phân biệt A và B .

- | | |
|--|--|
| a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ ngược hướng. | b) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng phương. |
| c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng. | d) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng. |

Chú ý. Ta có thể dùng vector để biểu diễn các đại lượng như lực, vận tốc, gia tốc. Hướng của vector chỉ hướng của đại lượng, độ dài của vector thể hiện cho độ lớn của đại lượng và được lấy tỉ lệ với độ lớn của đại lượng.

» **Ví dụ 4.** Một vật A được thả chìm hoàn toàn dưới đáy một cốc chất lỏng. Biết rằng trong ba cách biểu diễn lực đẩy Archimedes (Ác-si-mét) $\vec{F}$ và trọng lực $\vec{P}$ tác động lên vật A ở Hình 4.11, có một cách biểu diễn đúng.



Hình 4.11

Hãy chỉ ra mối quan hệ giữa trọng lượng riêng của vật A và trọng lượng riêng của chất lỏng trong cốc.

Giải

Lực đẩy Archimedes và trọng lực đều tác động lên vật A theo phương thẳng đứng, hai lực này cùng phương nhưng ngược hướng. Do đó, Hình 4.11a không đúng. Vật A chìm xuống đáy nên trọng lực P (có hướng từ trên xuống) lớn hơn lực đẩy Archimedes F (có hướng từ dưới lên). Do vậy, Hình 4.11c không đúng.

Vậy hình biểu diễn đúng là Hình 4.11b. Theo đó, vector biểu diễn lực $\vec{P}$ có độ dài gấp 3 lần độ dài của vector biểu diễn lực $\vec{F}$.

Độ lớn của trọng lực và lực đẩy Archimedes tác động lên A là: $|\vec{P}| = d' \cdot V$, $|\vec{F}| = d \cdot V$, trong đó V (m^3) là thể tích của vật A và d', d (N/m^3) tương ứng là trọng lượng riêng của vật A và của chất lỏng. Do $|\vec{P}| = 3|\vec{F}|$ (theo H.4.11b) nên $d' = 3d$. Vậy trọng lượng riêng của vật A gấp 3 lần trọng lượng riêng của chất lỏng trong cốc.

» **Vận dụng.** Hai ca nô A và B chạy trên sông với các vận tốc riêng có cùng độ lớn là 15 km/h . Tuy vậy, ca nô A chạy xuôi dòng còn ca nô B chạy ngược dòng. Vận tốc của dòng nước trên sông là 3 km/h .

- Hãy thể hiện trên hình vẽ, vector vận tốc $\vec{v}$ của dòng nước và các vector vận tốc thực tế $\vec{v}_a, \vec{v}_b$ của các ca nô A, B .
- Trong các vector $\vec{v}, \vec{v}_a, \vec{v}_b$, những cặp vector nào cùng phương và những cặp vector nào ngược hướng?

BÀI TẬP

4.1. Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều cùng hướng với $\vec{0}$;
- Nếu $\vec{b}$ không cùng hướng với $\vec{a}$ thì $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$;
- Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương;
- Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

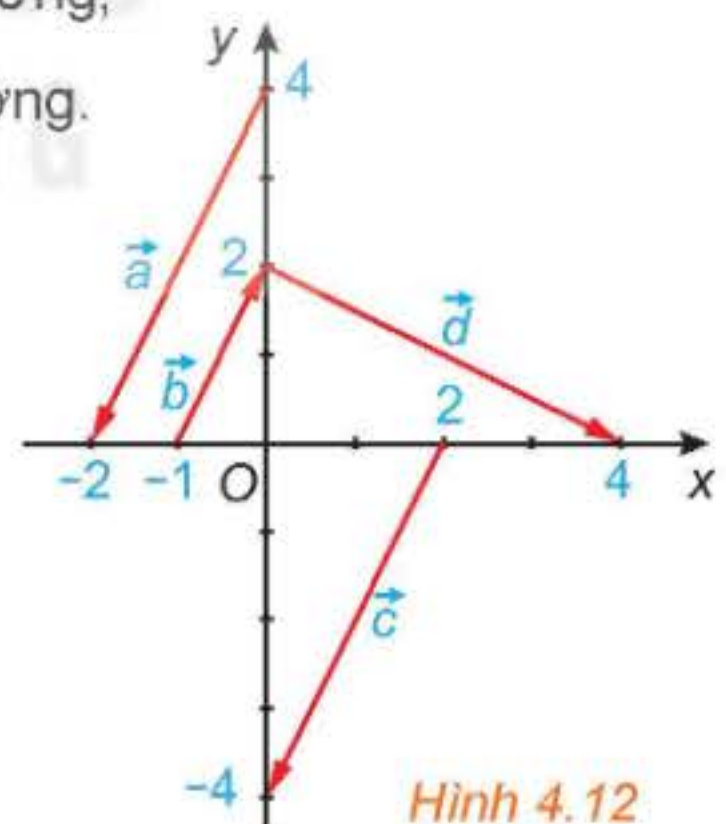
4.2. Trong Hình 4.12, hãy chỉ ra các vector cùng phương, các cặp vector ngược hướng và các cặp vector bằng nhau.

4.3. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành khi và chỉ khi $\vec{BC} = \vec{AD}$.

4.4. Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Hãy chỉ ra tập hợp S gồm tất cả các vector khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp $\{A; B; C; D; O\}$. Hãy chia tập S thành các nhóm sao cho hai vector thuộc cùng một nhóm khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

4.5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy vẽ các vector $\vec{OA}, \vec{MN}$ với $A(1; 2), M(0; -1), N(3; 5)$.

- Chỉ ra mối quan hệ giữa hai vector trên.
- Một vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi vector $\vec{v} = \vec{OA}$. Hỏi vật thể đó có đi qua N hay không? Nếu có thì sau bao lâu vật sẽ tới N ?



Hình 4.12