

THUẬT NGỮ

- Tổng của hai vector
- Hiệu của hai vector
- Vector đối

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Thực hiện các phép toán cộng, trừ vector.
- Mô tả trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác bằng vector.
- Vận dụng vector trong bài toán tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc.

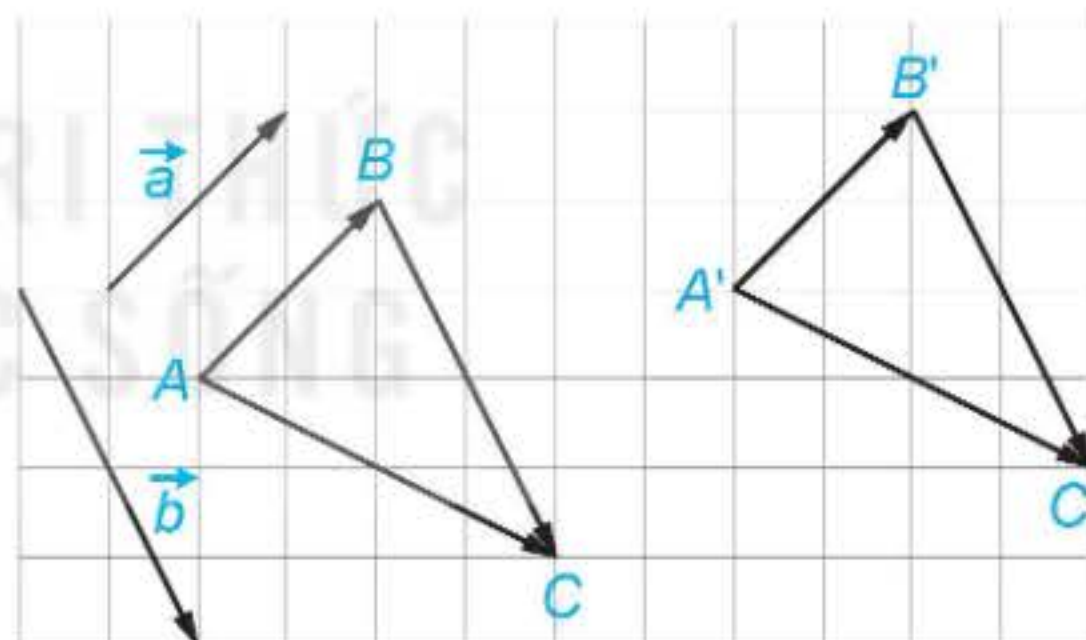
Một con tàu chuyển động từ bờ bên này sang bờ bên kia của một dòng sông với vận tốc riêng không đổi. Giả sử vận tốc dòng nước là không đổi và đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc thực tế của tàu. Nếu không quan tâm đến điểm đến thì cần giữ lái cho tàu tạo với bờ sông một góc bao nhiêu để tàu sang bờ bên kia được nhanh nhất?



Vận tốc thực tế của con tàu trên sông đối với bờ phụ thuộc vào vận tốc riêng của tàu (đối với dòng nước) và vận tốc của dòng nước (đối với bờ). Tương tự, một vật thường chịu tác động của nhiều lực. Ta đã biết dùng vector để biểu diễn các đại lượng đó; bài học này xây dựng các phép toán vector, tương thích với việc tổng hợp vận tốc, tổng hợp và phân tích lực.

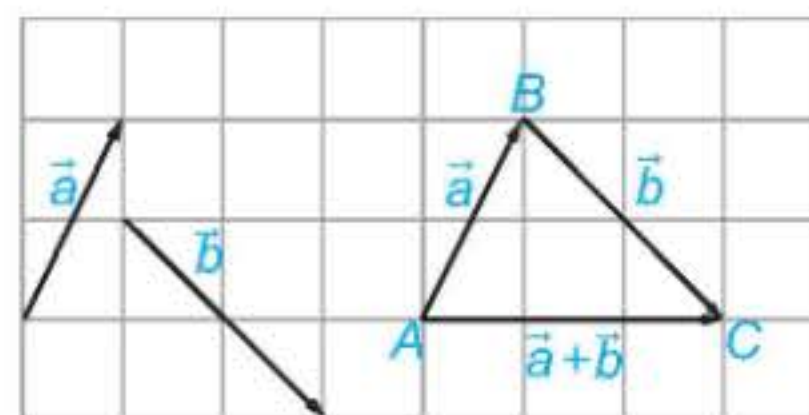
1. TỔNG CỦA HAI VECTO

H.01. Với hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cho trước, lấy một điểm A và vẽ các vector $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Lấy điểm A' khác A và cũng vẽ các vector $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}, \overrightarrow{B'C'} = \vec{b}$. Hỏi hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ có mối quan hệ gì?



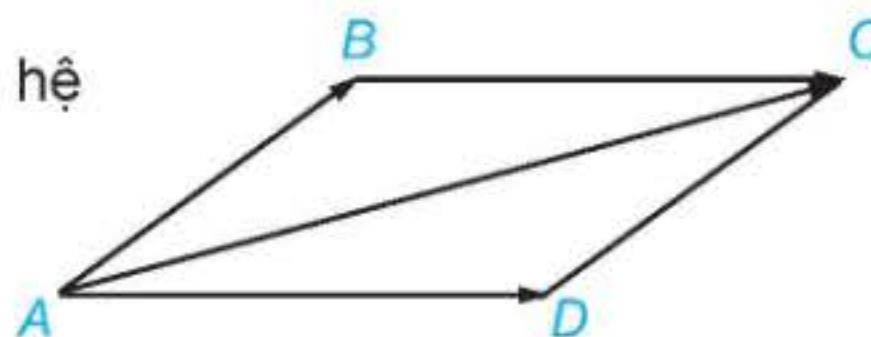
Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý và vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (H.4.13). Khi đó vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vector** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vector được gọi là **phép cộng vector**.



Hình 4.13

H.02. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm mối quan hệ giữa hai vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$.

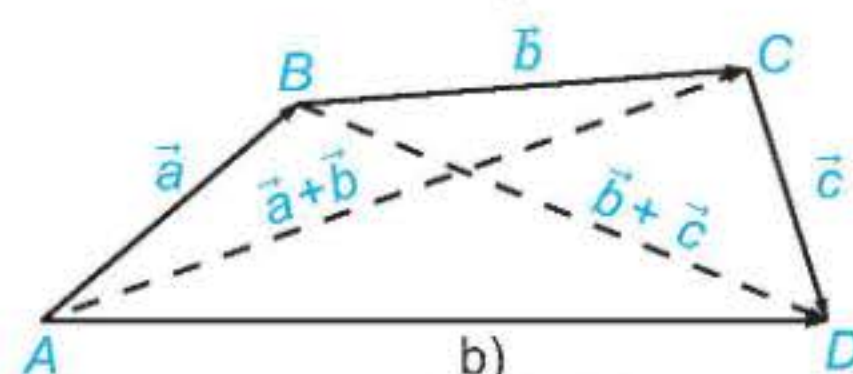
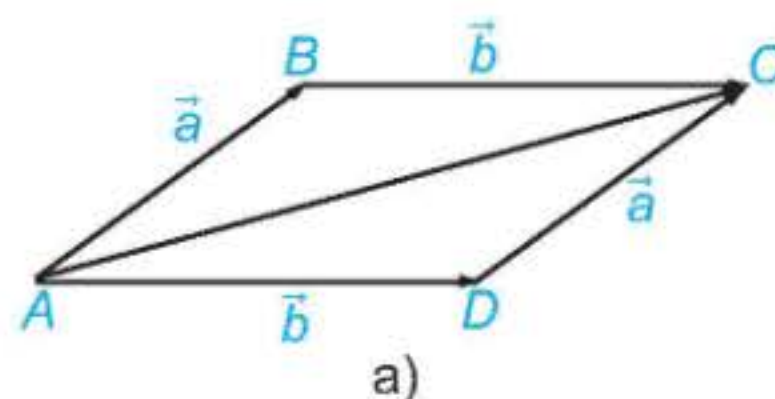


Quy tắc ba điểm: Với ba điểm bất kì A, B, C , ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

» **HĐ3.** a) Trong Hình 4.14a, hãy chỉ ra vector $\vec{a} + \vec{b}$ và vector $\vec{b} + \vec{a}$.

b) Trong Hình 4.14b, hãy chỉ ra vector $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ và vector $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.



Hình 4.14

Với ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý:

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- Tính chất của vector-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Chú ý. Do các vector $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ và $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ bằng nhau, nên ta còn viết chúng dưới dạng $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và gọi là *tổng của ba vector* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Tương tự, ta cũng có thể viết tổng của một số vector mà không cần dùng các dấu ngoặc.

» **Ví dụ 1.** Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$.

Giải

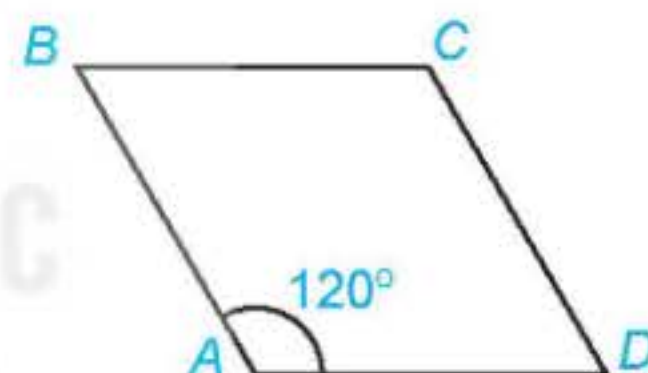
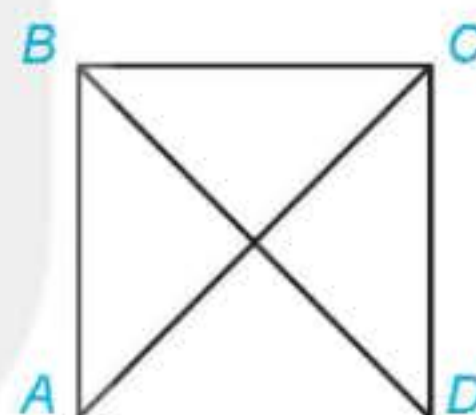
Do $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$.

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = \sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

Do đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2}$.

» **Luyện tập 1.** Cho hình thoi $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1 và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}$.



2. HIỆU CỦA HAI VECTOR



Hai đội kéo co bất phân thắng bại!

» **HĐ4.** Thế nào là hai lực cân bằng? Nếu dùng hai vector để biểu diễn hai lực cân bằng thì hai vector này có mối quan hệ gì với nhau?

- Vector có cùng độ dài và ngược hướng với vector $\vec{a}$ được gọi là **vector đối** của vector $\vec{a}$. Vector đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Vector $\vec{0}$ được coi là vector đối của chính nó.

Chú ý. Hai vector đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

Vector $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là **hiệu của hai vector** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$. Phép lấy hiệu hai vector được gọi là **phép trừ vector**.

Chú ý. Nếu $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ thì $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c} + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{c} + \vec{0} = \vec{c}$.

Với ba điểm O, M, N tùy ý, ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = (-\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.

Quy tắc hiệu: Với ba điểm O, M, N , ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.

» **Ví dụ 2.** Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm O bất kì.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Giải

Áp dụng quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

» **Ví dụ 3.** a) Chứng minh rằng nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

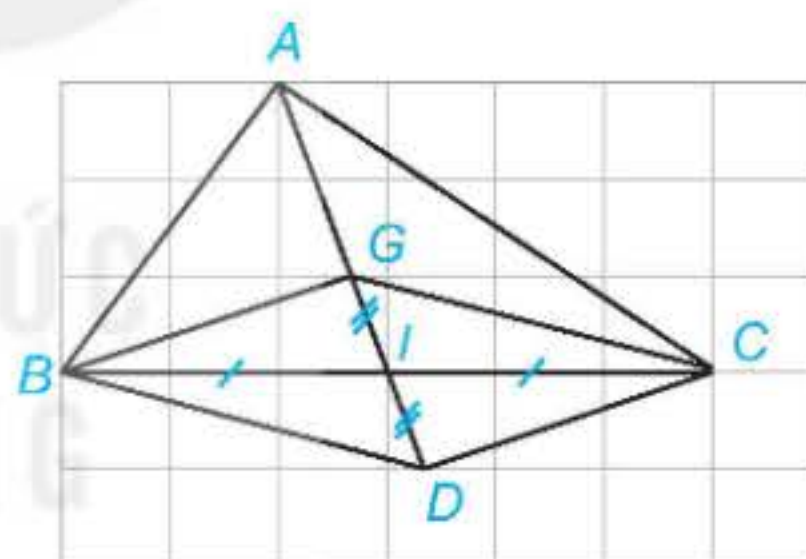
Giải

a) (H.4.15) Khi I là trung điểm của AB , thì hai vector $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ có cùng độ dài và ngược hướng. Do đó, $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ đối nhau, suy ra $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.



Hình 4.15

b) (H.4.16) Trọng tâm G của tam giác ABC thuộc trung tuyến AI và $GA = 2GI$. Lấy điểm D đối xứng với G qua I . Khi đó tứ giác $GBDC$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là một hình bình hành. Ta có $GA = 2GI = GD$.



Hình 4.16

Hai vector $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GD}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vector đối nhau, do đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Trong hình bình hành $GBDC$, ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

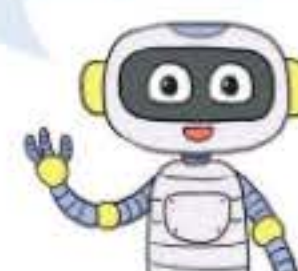
Vậy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

» **Luyện tập 2.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và O là trung điểm của MN . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Chú ý. Phép cộng vector tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:

- Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vector $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vector $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
- Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước) được biểu diễn bởi vector $\vec{v}_r$ và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vector $\vec{v}_n$ thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vector $\vec{v}_r + \vec{v}_n$.

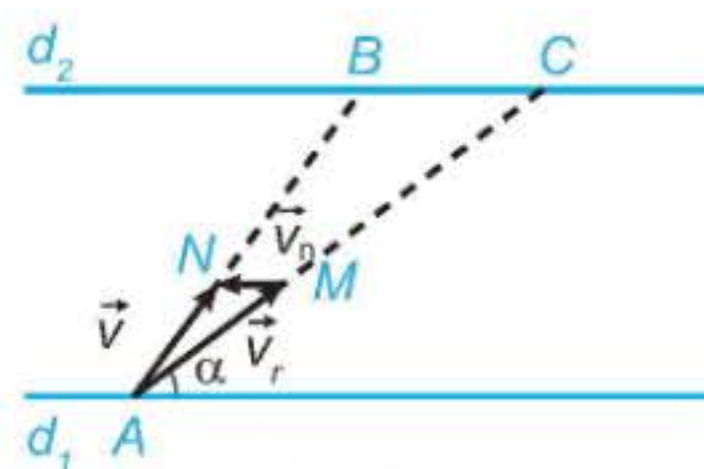
Trong Vật lí, trọng tâm của một vật là điểm đặt của trọng lực tác dụng lên vật đó. Đối với một vật mỏng hình đa giác $A_1A_2...A_n$ thì trọng tâm của nó là điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \dots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.



» **Ví dụ 4.** Hãy giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Giải

Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng song song d_1, d_2 (H.4.17). Giả sử tàu xuất phát từ $A \in d_1$ và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ góc α . Gọi $\vec{v}_r$ và $\vec{v}_n$ lần lượt là vector vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi M, N là các điểm sao cho $\vec{v}_r = \vec{AM}, \vec{v}_n = \vec{MN}$.



Hình 4.17

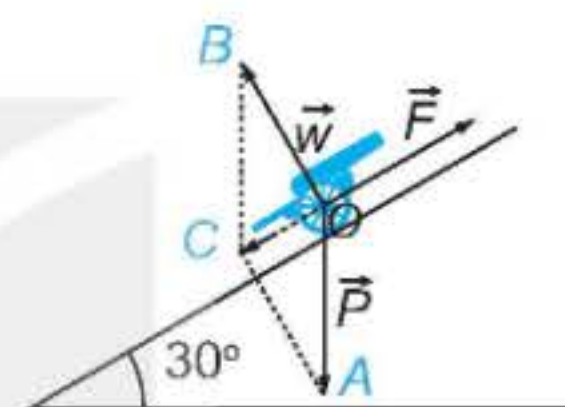
Khi đó tàu chuyển động với vector vận tốc thực tế là $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_n = \vec{AM} + \vec{MN} = \vec{AN}$.

Gọi B, C tương ứng là giao điểm của AN, AM với d_2 . Tàu chuyển động thẳng từ A đến B với vector vận tốc thực tế $\vec{AN}$, do đó thời gian cần thiết để tàu sang được bờ d_2 là $\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM}$.

Mặt khác, $AM = |\vec{v}_r|$ không đổi nên $\frac{AC}{AM}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC \perp d_2 \Leftrightarrow AM \perp d_2$.

Vậy để tàu sang được bờ bên kia nhanh nhất, ta cần giữ bánh lái để tàu luôn vuông góc với bờ.

» **Vận dụng.** Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng 22 148 N (ứng với khối lượng xấp xỉ 2 260 kg) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (H.4.18). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N, thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo?



Hình 4.18

Chú ý. Ta coi khẩu pháo chịu tác động của ba lực: trọng lực $\vec{P}$ (có độ lớn $|\vec{P}| = 22\,148$ N, có phương vuông góc với phương nằm ngang và hướng xuống dưới), phản lực $\vec{w}$ (có độ lớn $|\vec{w}| = |\vec{P}| \cos 30^\circ$, có phương vuông góc với mặt dốc và hướng lên trên) và lực kéo $\vec{F}$ (theo phương dốc, hướng từ chân dốc lên đỉnh dốc).

BÀI TẬP

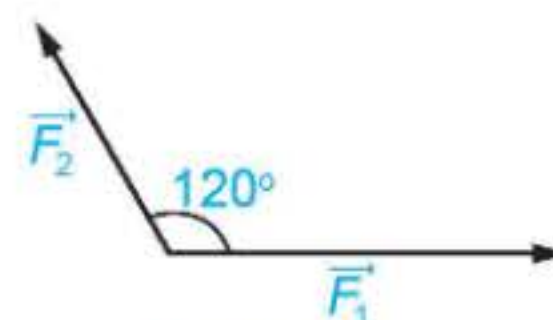
4.6. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng:

a) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$; b) $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{BC} - \vec{BD}$.

4.7. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\vec{BM} = \vec{AB} + \vec{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai vector $\vec{CD}$ và $\vec{CM}$.

4.8. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính độ dài của các vector $\vec{AB} - \vec{AC}$, $\vec{AB} + \vec{AC}$.

4.9. Hình 4.19 biểu diễn hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động lên một vật, cho $|\vec{F}_1| = 3$ N, $|\vec{F}_2| = 2$ N. Tính độ lớn của hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.



Hình 4.19

4.10. Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?

