

THUẬT NGỮ

- Tích của vector với một số
- Phân tích một vector theo hai vector không cùng phương

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Thực hiện phép nhân vector với một số.
- Mô tả các mối quan hệ cùng phương, cùng hướng bằng vector.

Với mỗi cặp vật đặt trên hai đầu của một thanh đòn AB , luôn có duy nhất một điểm M thuộc AB để nếu đặt trụ đỡ tại M thì thanh đòn ở trạng thái cân bằng (H.4.20). Điều trên còn đúng trong những trường hợp tổng quát hơn, chẳng hạn, thanh đòn được thay bởi một tấm ván hình đa giác n đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$, tại mỗi đỉnh A_i có đặt một vật nặng m_i (kg). Ở đây, ta coi thanh đòn, tấm ván là không có trọng lượng. Trong Vật lí, điểm M như trên được gọi là điểm khối tâm của hệ chất điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ ứng với các khối lượng $m_1, m_2, \dots, m_n$ (kg).

Qua bài học này, ta sẽ thấy Hình học cho phép xác định vị trí điểm khối tâm của một hệ chất điểm.



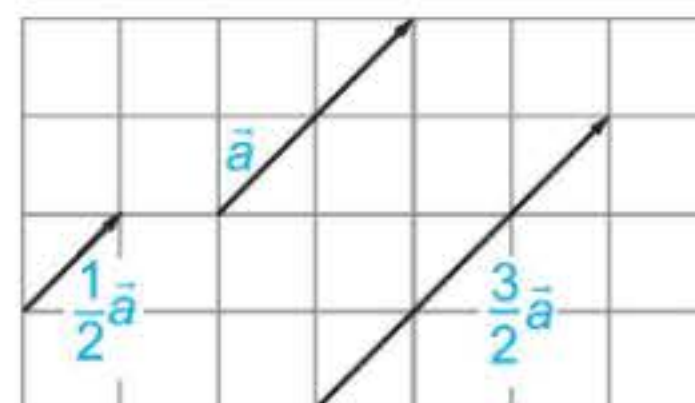
Hình 4.20

1. TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

» **H01.** Cho vector $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Hãy xác định điểm C sao cho $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$.

- Tìm mối quan hệ giữa $\overrightarrow{AC}$ và $\vec{a} + \vec{a}$.
- Vector $\vec{a} + \vec{a}$ có mối quan hệ như thế nào về hướng và độ dài đối với vector $\vec{a}$?

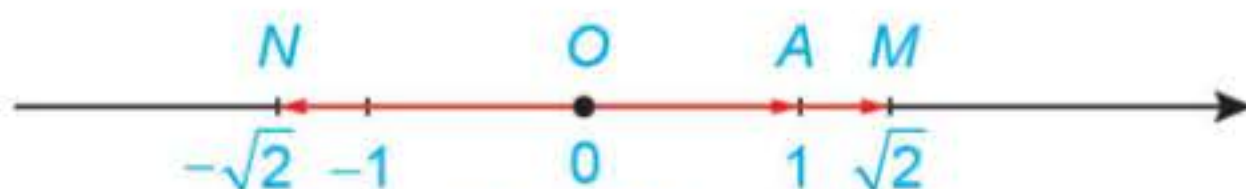
Tích của một vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k > 0$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với vector $\vec{a}$ và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$.



Hình 4.21

❓ $1\vec{a}$ và $\vec{a}$ có bằng nhau hay không?

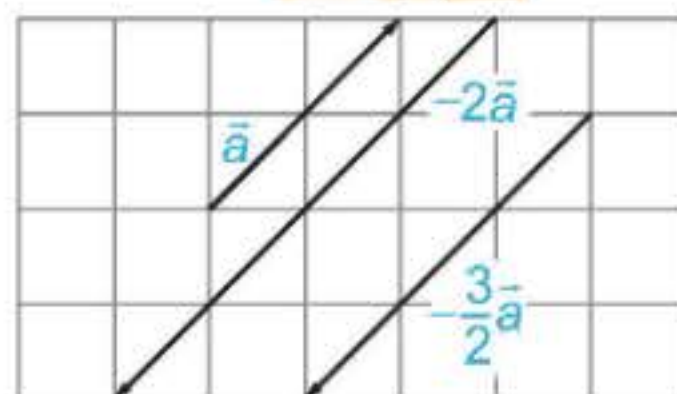
» **HĐ2.** Trên một trục số, gọi O, A, M, N tương ứng biểu diễn các số $0; 1; \sqrt{2}; -\sqrt{2}$. Hãy nêu mối quan hệ về hướng và độ dài của mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ với vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Viết đẳng thức thể hiện mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$.



Hình 4.22

Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k < 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $(-k)|\vec{a}|$.

Mối quan hệ giữa $\overrightarrow{ON}$ và $\overrightarrow{OA}$ được thể hiện bởi đẳng thức nào?

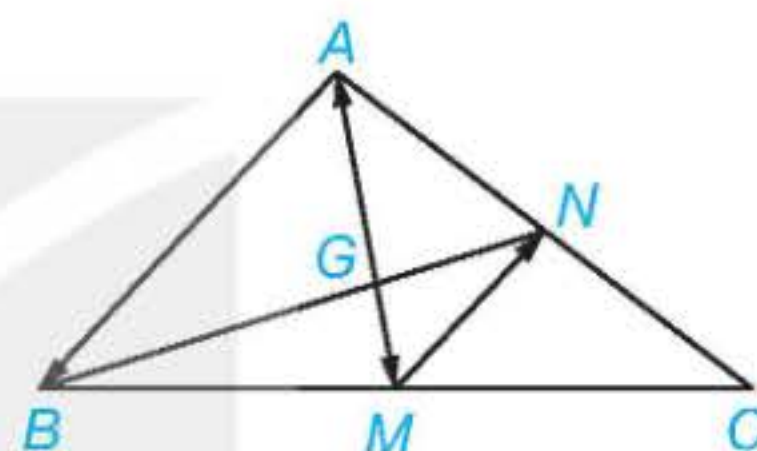


Hình 4.23

Chú ý. Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

Trong Hình 4.24, hai trung tuyến AM và BN của tam giác ABC cắt nhau tại G .

Ta có $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Hình 4.24

Nhận xét. Vectơ $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k < 0$.

Phép lấy tích của vectơ với một số gọi là *phép nhân vectơ với một số* (hay *phép nhân một số với vectơ*).

❓ $-\vec{a}$ và $(-1)\vec{a}$ có mối quan hệ gì?

» **Ví dụ 1.** Chứng minh rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Giải

Thật vậy, nếu $\vec{a} = k\vec{b}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Ngược lại, giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, ta lấy $k = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng và lấy $k = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng. Khi đó $\vec{a} = k\vec{b}$.

» **Luyện tập 1.** Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt A và B (H.4.25). Những khẳng định nào sau đây là đúng?

- Điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi tồn tại số t để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.
- Với điểm M bất kì, ta luôn có $\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AB}\overrightarrow{AB}$.
- Điểm M thuộc tia đối của tia AB khi và chỉ khi tồn tại số $t \leq 0$ để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.



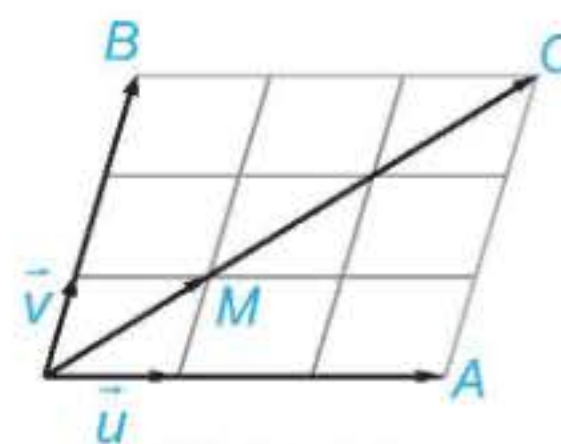
Hình 4.25

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ

» **HĐ3.** Với $\vec{u} \neq \vec{0}$ và hai số thực k, t , những khẳng định nào sau đây là đúng?

- Hai vectơ $k(\vec{t}\vec{u})$ và $(kt)\vec{u}$ có cùng độ dài bằng $|kt||\vec{u}|$.
- Nếu $kt \geq 0$ thì cả hai vectơ $k(\vec{t}\vec{u})$, $(kt)\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{u}$.
- Nếu $kt < 0$ thì cả hai vectơ $k(\vec{t}\vec{u})$, $(kt)\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{u}$.
- Hai vectơ $k(\vec{t}\vec{u})$ và $(kt)\vec{u}$ bằng nhau.

» **HĐ4.** Hãy chỉ ra trên Hình 4.26 hai vectơ $3(\vec{u} + \vec{v})$ và $3\vec{u} + 3\vec{v}$.
Từ đó, nêu mối quan hệ giữa $3(\vec{u} + \vec{v})$ và $3\vec{u} + 3\vec{v}$.



Hình 4.26

Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực k, t , ta luôn có:

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;
- $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

» **Ví dụ 2.** Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I . Chứng minh rằng với điểm O tùy ý, ta có

$$\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OI}.$$

Giải

Vì I là trung điểm của AB nên $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ (Ví dụ 3a, Bài 8).

Do đó $\vec{OA} + \vec{OB} = (\vec{OI} + \vec{IA}) + (\vec{OI} + \vec{IB}) = 2\vec{OI} + (\vec{IA} + \vec{IB}) = 2\vec{OI}$.

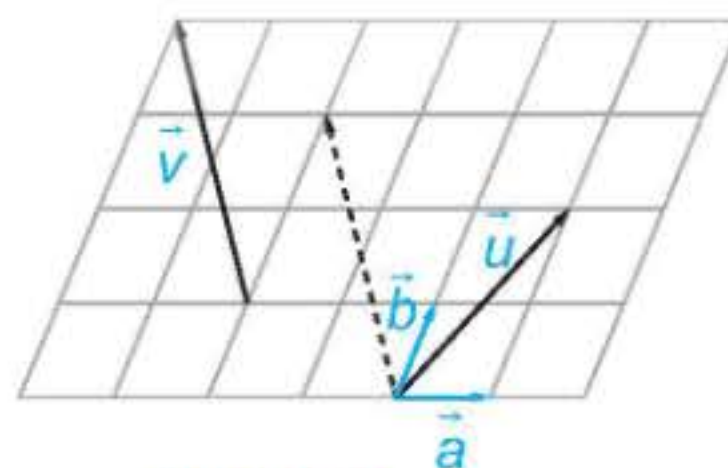
» **Luyện tập 2.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh rằng với điểm O tùy ý, ta có

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}.$$

Nhận xét

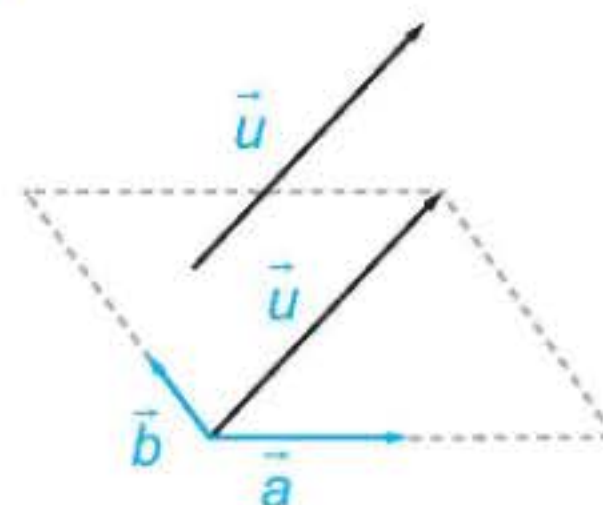
- Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
- Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

» **Luyện tập 3.** Trong Hình 4.27, hãy biểu thị mỗi vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, tức là tìm các số x, y, z, t để $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $\vec{v} = t\vec{a} + z\vec{b}$.



Hình 4.27

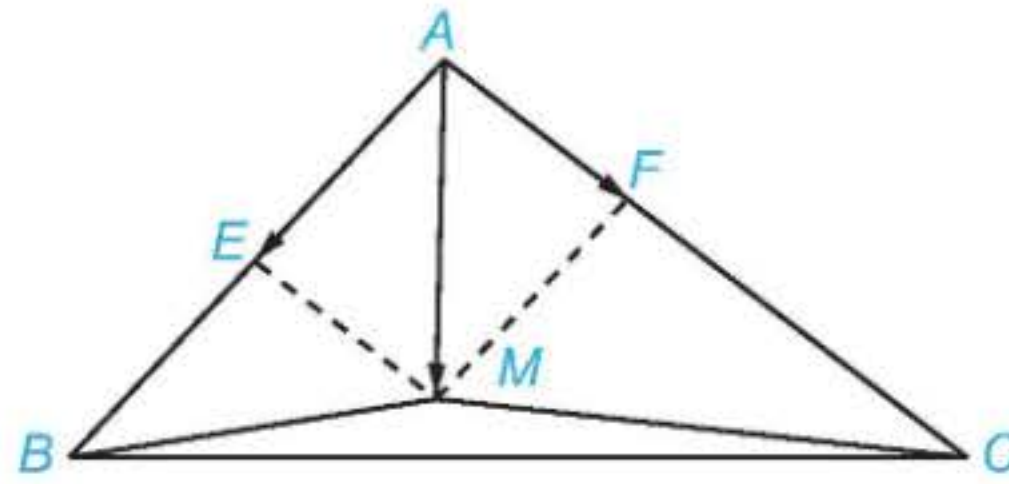
Chú ý. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ (H.4.28). Khi đó, mọi vectơ $\vec{u}$ đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số (x, y) sao cho $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$.



Hình 4.28

» **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC . Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Giải (H.4.29)



Hình 4.29

Để xác định vị trí của M , trước hết ta biểu thị $\overrightarrow{AM}$ (với gốc A đã biết) theo hai vectơ đã biết $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Đẳng thức vectơ đã cho tương đương với: $\overrightarrow{MA} + 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Lấy điểm E là trung điểm của AB và điểm F thuộc cạnh AC sao cho $AF = \frac{1}{3}AC$.

Khi đó $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Vì vậy $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.

Suy ra M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $EAFM$.

Ta trở lại vấn đề đã được nêu trong phần đầu bài học. Điểm khối tâm M của hệ các chất điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ với các khối lượng tương ứng $m_1, m_2, \dots, m_n$ được xác định bởi đẳng thức vectơ

$$m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \vec{0}.$$

Vì vậy, việc xác định điểm khối tâm được quy về việc xác định điểm thoả mãn đẳng thức vectơ tương ứng.

BÀI TẬP

4.11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

4.12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

4.13. Cho hai điểm phân biệt A và B .

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

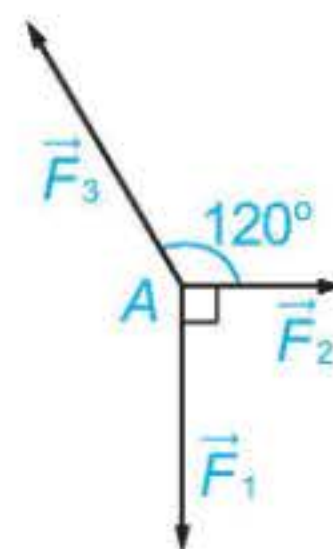
b) Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta có $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

4.14. Cho tam giác ABC .

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$.

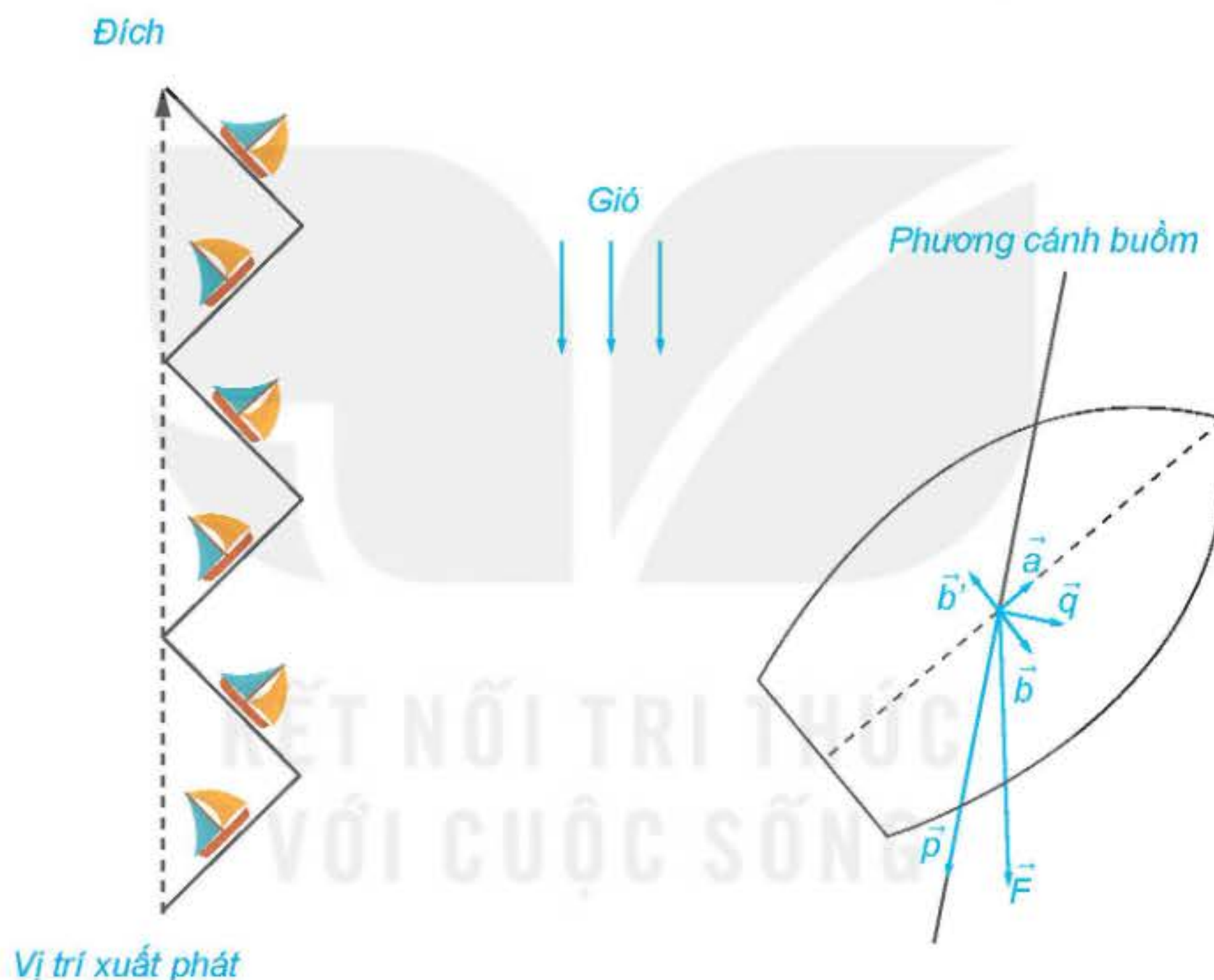
- 4.15.** Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\vec{F}_2, \vec{F}_3$, biết $\vec{F}_1$ có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

Em có biết?

Mặc dù dựa vào lực đẩy của gió, bằng cách đi theo đường dích dắc, thuyền buồm vẫn có thể di chuyển tới một vị trí ở ngược hướng gió so với vị trí xuất phát.



Ta hãy dùng kiến thức về vectơ để phân tích các lực chính tác động tới sự chuyển động của thuyền buồm trong trường hợp này. Lực $\vec{F}$ do gió tác động vào cánh buồm được phân tích thành lực $\vec{p}$ cùng phương với cánh buồm và lực $\vec{q}$ vuông góc với cánh buồm. Do cánh buồm mỏng nên lực $\vec{p}$ chỉ trượt đi mà không tác động lên cánh buồm. Ta lại phân tích lực $\vec{q}$ thành lực $\vec{a}$ cùng phương với sống thuyền và lực $\vec{b}$ có phương vuông góc với sống thuyền. Thuyền buồm có sống thuyền sâu (mũi nhọn) nên nó chịu một lực cản $\vec{b'}$ đáng kể của nước, vuông góc với sống thuyền. Người ta điều chỉnh hướng thuyền (hướng sống thuyền), phương của cánh buồm để lực cản $\vec{b'}$ của nước (lực này không phụ thuộc vào sự điều chỉnh) thắng lực $\vec{b}$ (có thể điều chỉnh độ lớn). Cuối cùng, dưới tác động của lực $\vec{a}$ thuyền di chuyển và sau một khoảng thời gian, nó lại được điều chỉnh hướng, để đi đến đích theo đường dích dắc.