

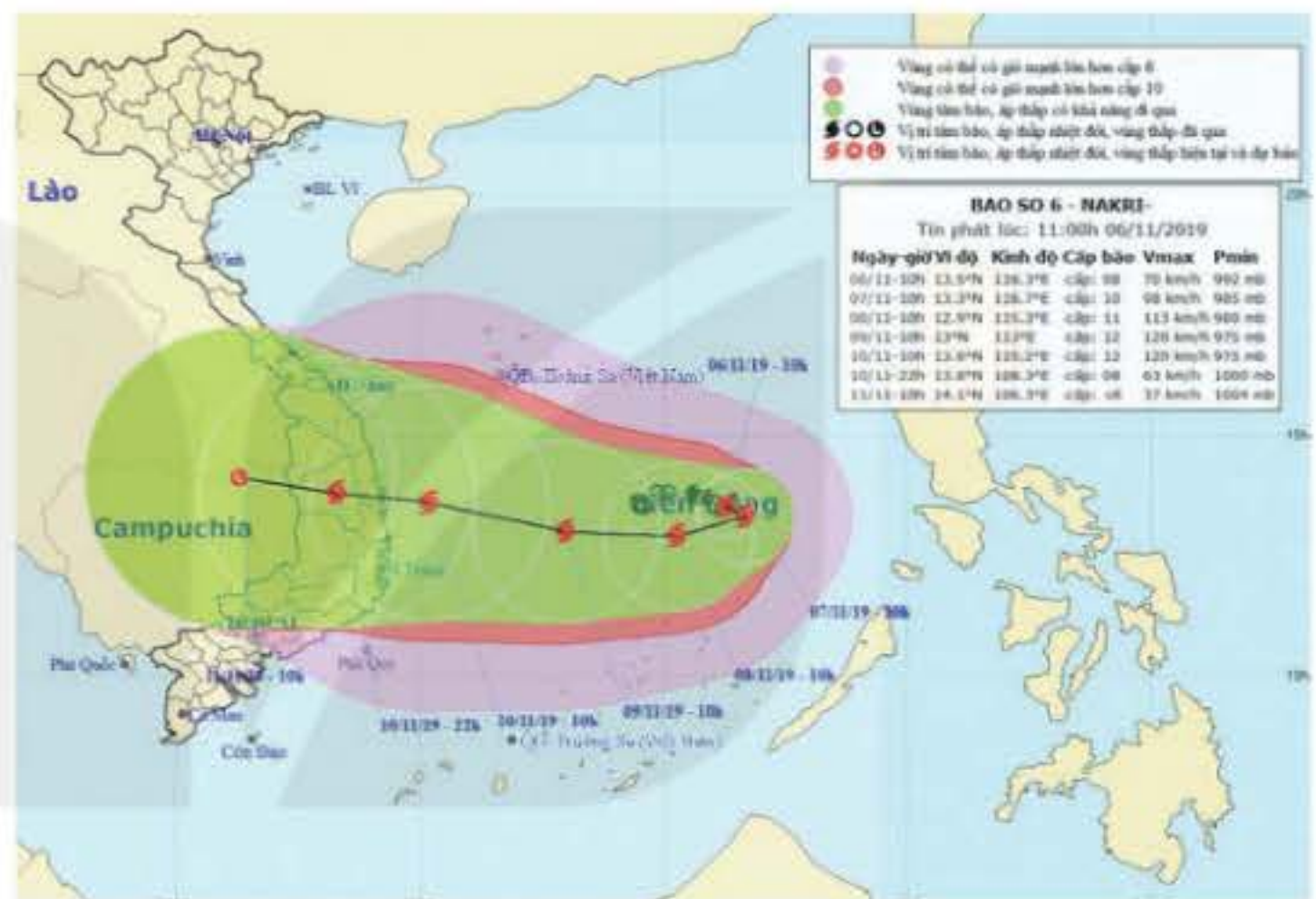
THUẬT NGỮ

- Mặt phẳng toạ độ
- Toạ độ của vectơ

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết toạ độ của vectơ và thể hiện các phép toán vectơ theo toạ độ.
- Thể hiện mối quan hệ giữa các vectơ thông qua toạ độ của chúng.
- Ứng dụng của toạ độ vectơ trong bài toán xác định vị trí của vật trên mặt phẳng toạ độ.

Một bản tin dự báo thời tiết thể hiện đường đi trong 12 giờ của một cơn bão trên một mặt phẳng toạ độ. Trong khoảng thời gian đó, tâm bão di chuyển thẳng đều từ vị trí có toạ độ $(13,8; 108,3)$ đến vị trí có toạ độ $(14,1; 106,3)$. Dựa vào thông tin trên, liệu ta có thể dự đoán được vị trí của tâm bão tại thời điểm bất kì trong khoảng thời gian 12 giờ đó hay không?



Hình 4.31. Ta có thể dùng một phần mặt phẳng toạ độ để mô tả một phạm vi nhất định trên Trái Đất mà vị trí x° vĩ bắc, y° kinh đông của tâm bão được thể hiện bởi điểm có toạ độ $(x; y)$.

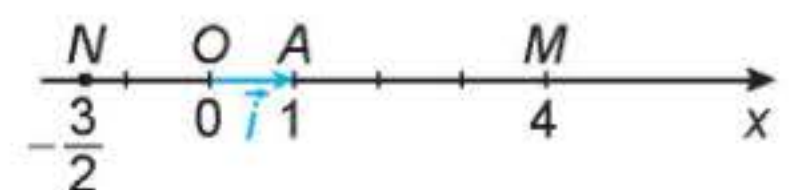
Trong bài học này, ta gán cho mỗi vectơ trên mặt phẳng toạ độ một cặp số để có thể làm việc với vectơ thông qua cặp số đó.

1. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

H.4.1. Trên trục số Ox , gọi A là điểm biểu diễn số 1 và đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ (H.4.32a). Gọi M là điểm biểu diễn số 4, N là điểm biểu diễn số $-\frac{3}{2}$. Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ theo vectơ $\vec{i}$.

Dùng vectơ, ta có thể diễn đạt lại trục số như sau:

Trục toạ độ (còn gọi là trục, hay trục số) là một đường thẳng mà trên đó đã xác định một điểm O và một vectơ $\vec{i}$ có độ dài bằng 1. Điểm O gọi là gốc toạ độ, vectơ $\vec{i}$ gọi là vectơ đơn vị của trục. Điểm M trên trục biểu diễn số x_0 nếu $\overrightarrow{OM} = x_0 \vec{i}$ (H.4.32b).



a)



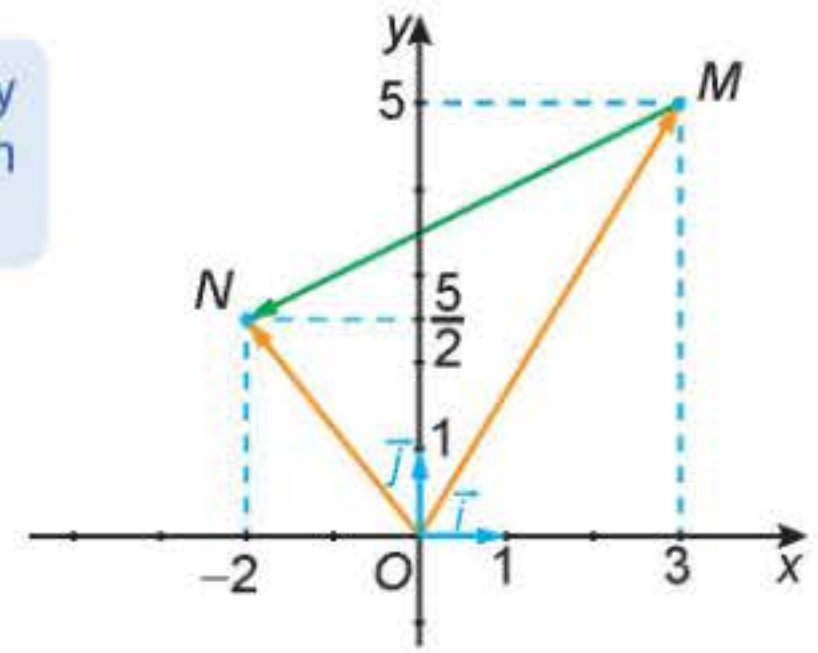
b)

Hình 4.32

» **H02.** Trong Hình 4.33:

- Hãy biểu thị mỗi vector $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ theo các vector $\vec{i}$, $\vec{j}$.
- Hãy biểu thị vector $\overrightarrow{MN}$ theo các vector $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, từ đó biểu thị vector $\overrightarrow{MN}$ theo các vector $\vec{i}$, $\vec{j}$.

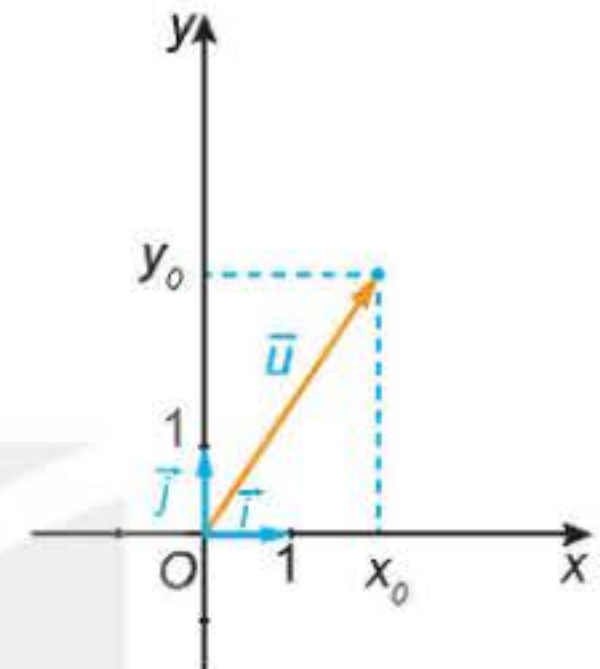
Hãy nhớ lại quy tắc hình bình hành và quy tắc hiệu.



Hình 4.33

Trên mặt phẳng với một đơn vị đo độ dài cho trước, xét hai trục Ox , Oy có chung gốc O và vuông góc với nhau. Kí hiệu vector đơn vị của trục Ox là $\vec{i}$, vector đơn vị của trục Oy là $\vec{j}$. Hệ gồm hai trục Ox , Oy như vậy được gọi là *hệ trục tọa độ Oxy*. Điểm O gọi là *gốc tọa độ*, trục Ox gọi là *trục hoành*, trục Oy gọi là *trục tung*. Mặt phẳng chứa hệ trục tọa độ Oxy gọi là **mặt phẳng tọa độ Oxy** hay mặt phẳng Oxy (H.4.34).

Với mỗi vector $\vec{u}$ trên mặt phẳng Oxy , có duy nhất cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. Ta nói vector $\vec{u}$ có tọa độ $(x_0; y_0)$ và viết $\vec{u} = (x_0; y_0)$ hay $\vec{u}(x_0; y_0)$. Các số x_0, y_0 tương ứng được gọi là **hoành độ**, **tung độ** của $\vec{u}$.



Hình 4.34

Nhận xét. Hai vector bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng tọa độ.

$$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

» **Ví dụ 1.** Tìm tọa độ của các vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$ tương ứng của các trục Ox, Oy .

Giải

Vì $\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j}$ nên $\vec{i}$ có tọa độ là $(1; 0)$.

Vì $\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j}$ nên $\vec{j}$ có tọa độ là $(0; 1)$.

» **Luyện tập 1.** Tìm tọa độ của $\vec{0}$.

2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

» **H03.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = (2; -3)$, $\vec{v} = (4; 1)$, $\vec{a} = (8; -12)$.

- Hãy biểu thị mỗi vector $\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}$ theo các vector $\vec{i}, \vec{j}$.
- Tìm tọa độ của các vector $\vec{u} + \vec{v}$, $4\vec{u}$.
- Tìm mối liên hệ giữa hai vector $\vec{u}, \vec{a}$.

Cho hai vector $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$. Khi đó:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$;
- $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$;
- $k\vec{u} = (kx; ky)$, với $k \in \mathbb{R}$.

» **Ví dụ 2.** Cho $\vec{a} = (1; 2), \vec{b} = \left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

- a) Tìm tọa độ của $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}$.
b) Hỏi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng phương hay không?

Giải

a) Vì $\vec{a} = (1; 2), \vec{b} = \left(\frac{3}{2}; 3\right)$ nên $\vec{a} + \vec{b} = \left(\frac{5}{2}; 5\right)$.

Ta có $2\vec{b} = (3; 6)$ nên $\vec{a} - 2\vec{b} = (-2; -4)$.

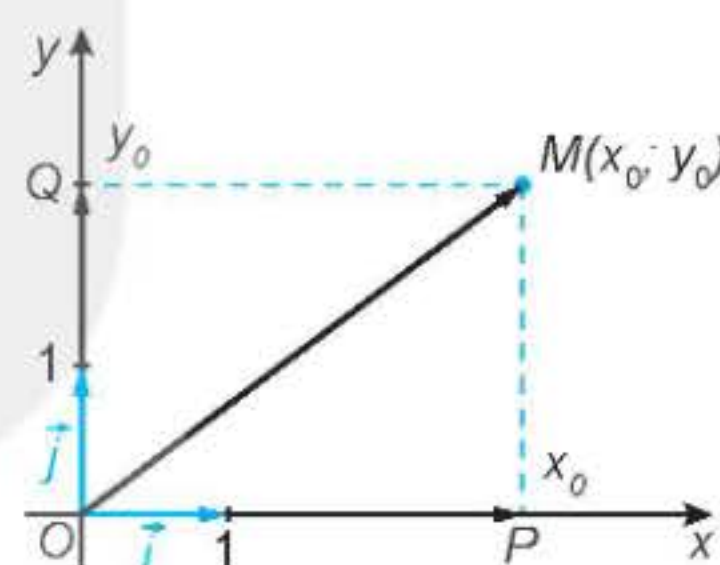
b) Do $\frac{3}{2}\vec{a} = \left(\frac{3}{2}; 3\right) = \vec{b}$ nên hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Nhận xét. Vector $\vec{v}(x'; y')$ cùng phương với vector $\vec{u}(x; y) \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $x' = kx, y' = ky$ (hay là $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ nếu $xy \neq 0$).

» **HĐ4.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(x_0; y_0)$.

Gọi P, Q tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành Ox và trục tung Oy (H.4.35).

- a) Trên trục Ox , điểm P biểu diễn số nào? Biểu thị $\overrightarrow{OP}$ theo $\vec{i}$ và tính độ dài của $\overrightarrow{OP}$ theo x_0 .
b) Trên trục Oy , điểm Q biểu diễn số nào? Biểu thị $\overrightarrow{OQ}$ theo $\vec{j}$ và tính độ dài của $\overrightarrow{OQ}$ theo y_0 .
c) Dựa vào hình chữ nhật $OPMQ$, tính độ dài của $\overrightarrow{OM}$ theo x_0, y_0 .
d) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo các vector $\vec{i}, \vec{j}$.



Hình 4.35

Nếu điểm M có tọa độ $(x; y)$ thì vector $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ $(x; y)$ và độ dài $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Nhận xét. Với vector $\vec{u} = (x; y)$, ta lấy điểm $M(x; y)$ thì $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Do đó, $|\vec{u}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Chẳng hạn, vector $\vec{u} = (2; -1)$ có độ dài là $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

» **HĐ5.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $M(x; y)$ và $N(x'; y')$.

- a) Tìm tọa độ của các vector $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$.
b) Biểu thị vector $\overrightarrow{MN}$ theo các vector $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ và tìm tọa độ của $\overrightarrow{MN}$.
c) Tìm độ dài của vector $\overrightarrow{MN}$.

Với hai điểm $M(x; y)$ và $N(x'; y')$ thì $\overrightarrow{MN} = (x' - x; y' - y)$ và khoảng cách giữa hai điểm M, N là $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.

» **Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(3; 2)$, $C(7; 4)$.

- Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$. So sánh các khoảng cách từ B tới A và C .
- Ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?
- Tìm điểm $D(x; y)$ để $ABCD$ là một hình thoi.

Giải

- Ta có $\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 2 - (-2)) = (2; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (7 - 3; 4 - 2) = (4; 2)$.

Các khoảng cách từ B tới A và C lần lượt là:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}; \quad BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Do đó các khoảng cách này bằng nhau.

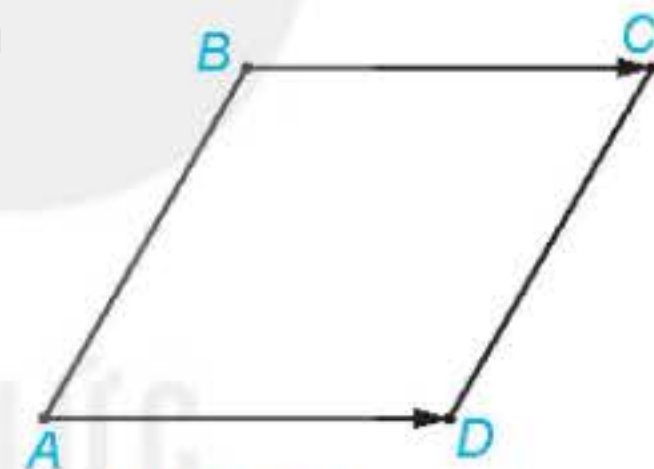
- Hai vectơ $\overrightarrow{AB} = (2; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (4; 2)$ không cùng phương (vì $\frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$). Do đó các điểm A, B, C không cùng nằm trên một đường thẳng. Vậy chúng không thẳng hàng.

- Các điểm A, B, C không thẳng hàng và $BA = BC$ nên $ABCD$ là một hình thoi khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Do $\overrightarrow{AD} = (x - 1; y + 2)$, $\overrightarrow{BC} = (4; 2)$ nên

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 4 \\ y + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $D(5; 0)$.



Hình 4.36

» **Luyện tập 2.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(2; 1)$, $B(3; 3)$.

- Các điểm O, A, B có thẳng hàng hay không?
- Tìm điểm $M(x; y)$ để $OABM$ là một hình bình hành.

» **Ví dụ 4.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng:

$$A(1; 3), B(-2; 6), C(5; 1).$$

- Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
- Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Giải

a) (H.4.37) Điểm $I(x; y)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ (*).



Hình 4.37

Mặt khác $\vec{IA} = (1 - x; 3 - y)$, $\vec{IB} = (-2 - x; 6 - y)$, $\vec{IA} + \vec{IB} = (-1 - 2x; 9 - 2y)$.

$$\text{Do đó, (*) tương đương với } \begin{cases} -1 - 2x = 0 \\ 9 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right).$$

b) Điểm $G(x; y)$ là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ (**).

Mặt khác

$$\vec{GA} = (1 - x; 3 - y), \vec{GB} = (-2 - x; 6 - y), \vec{GC} = (5 - x; 1 - y),$$

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = (4 - 3x; 10 - 3y).$$

$$\text{Do đó, (**) tương đương với } \begin{cases} 4 - 3x = 0 \\ 10 - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } G\left(\frac{4}{3}; \frac{10}{3}\right).$$

Chú ý

- Trung điểm M của đoạn thẳng AB có tọa độ là $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

» **Vận dụng.** Từ thông tin dự báo bão được đưa ra ở đầu bài học, hãy xác định tọa độ vị trí M của tâm bão tại thời điểm 9 giờ trong khoảng thời gian 12 giờ của dự báo.

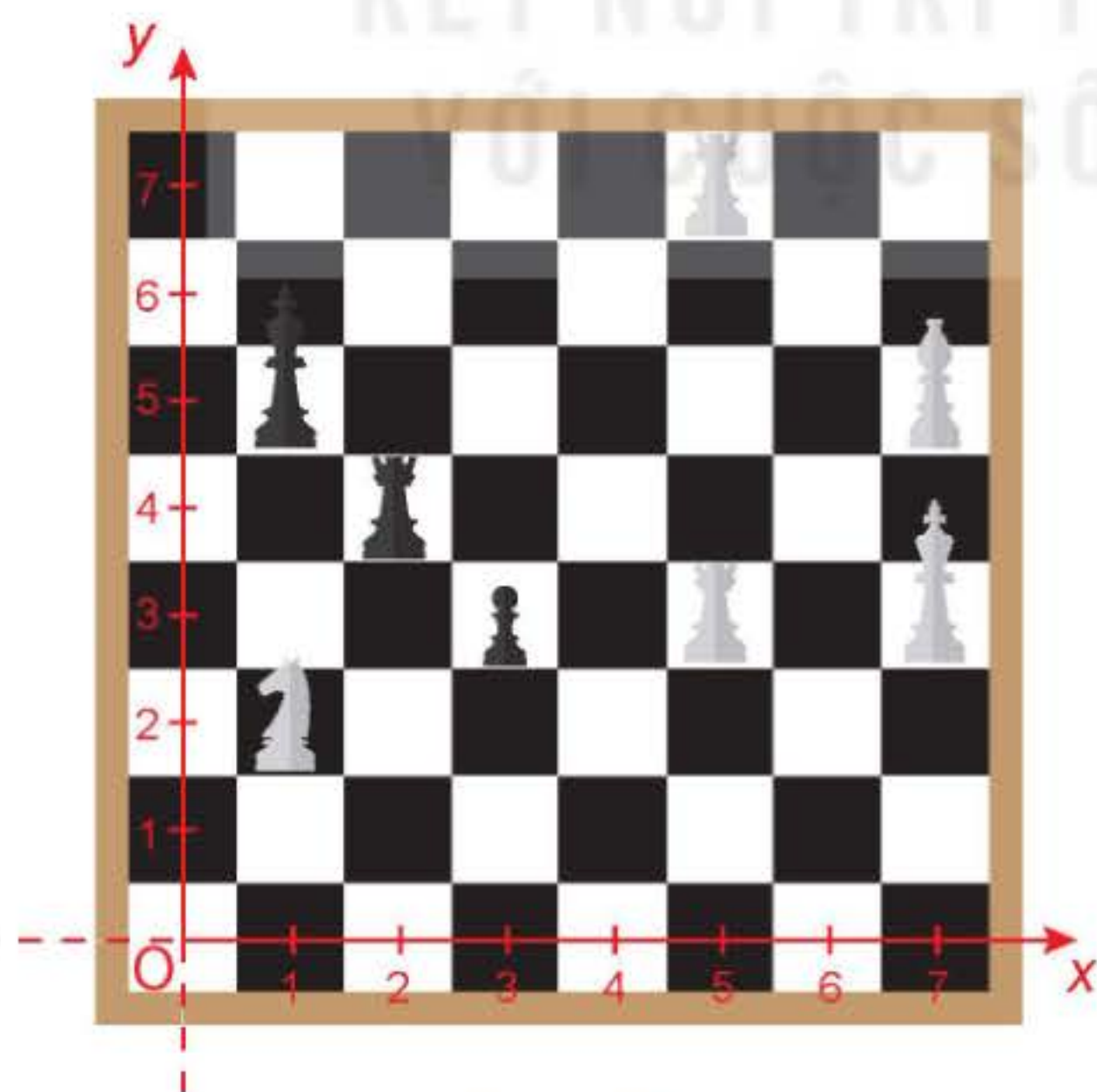
Chú ý. Để thể hiện một phần Trái Đất trên một bản đồ phẳng người ta dùng một phép chiếu bản đồ, với độ sai khác nhất định giữa bản vẽ và thực địa (thường được quy định với từng loại bản đồ). Về nguyên tắc, phạm vi thể hiện càng hẹp thì càng chính xác. Trong vận dụng này, ta chỉ tính toán trong phạm vi một đoạn đường đi ngắn của tâm bão.

Trong 12 giờ, tâm bão được dự báo di chuyển thẳng đều từ $A(13,8; 108,3)$ tới $B(14,1; 106,3)$. Gọi tọa độ của M là $(x; y)$. Bạn hãy tìm mối liên hệ giữa hai vector $\vec{AM}$ và $\vec{AB}$ rồi thể hiện mối quan hệ đó theo tọa độ để tìm $x; y$.



BÀI TẬP

- 4.16.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho các điểm $M(1; 3)$, $N(4; 2)$.
- Tính độ dài của các đoạn thẳng OM , ON , MN .
 - Chứng minh rằng tam giác OMN vuông cân.
- 4.17.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = (4; -1)$ và các điểm $M(-3; 6)$, $N(3; -3)$.
- Tìm mối liên hệ giữa các vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $2\vec{a} - \vec{b}$.
 - Các điểm O , M , N có thẳng hàng hay không?
 - Tìm điểm $P(x; y)$ để $OMNP$ là một hình bình hành.
- 4.18.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho các điểm $A(1; 3)$, $B(2; 4)$, $C(-3; 2)$.
- Chứng minh rằng A , B , C là ba đỉnh của một tam giác.
 - Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB .
 - Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC .
 - Tìm điểm $D(x; y)$ để $O(0; 0)$ là trọng tâm của tam giác ABD .
- 4.19.** Sự chuyển động của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng toạ độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí $A(1; 2)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v} = (3; 4)$. Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng toạ độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.
- 4.20.** Trong Hình 4.38, quân mã đang ở vị trí có toạ độ $(1; 2)$. Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?



Hình 4.38

Bạn có thể tìm hiểu để biết quy tắc đi của quân mã.

