

THUẬT NGỮ

- Góc giữa hai vectơ
- Tích vô hướng của hai vectơ

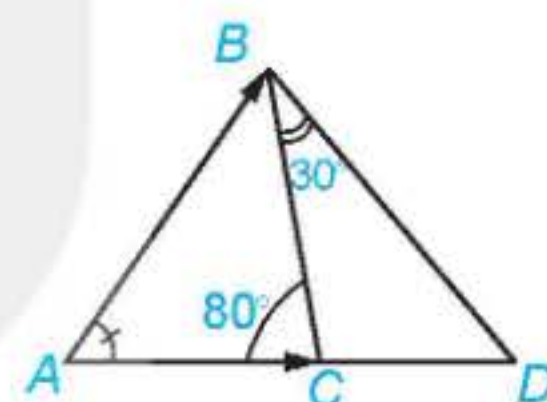
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Tính góc, tích vô hướng của hai vectơ trong những trường hợp cụ thể.
- Công thức tọa độ của tích vô hướng, tính chất của tích vô hướng.
- Liên hệ khái niệm tích vô hướng với khái niệm công trong Vật lí.

Toán học cung cấp ngôn ngữ và công cụ cho nhiều ngành khoa học. Trong các bài học trước, ta đã dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng lực, vận tốc và dùng phép toán vectơ để tính hợp lực và tổng hợp vận tốc. Bài học này tiếp tục xây dựng khái niệm tích vô hướng giữa hai vectơ – đối tượng toán học còn được dùng để định nghĩa khái niệm công sinh bởi một lực trong Vật lí.

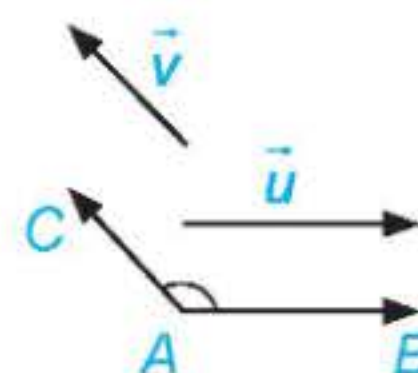
1. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

H.4.1. Trong Hình 4.39, số đo góc BAC cũng được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Hãy tìm số đo các góc giữa $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DB}$.



Hình 4.39

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Từ một điểm A tùy ý, vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ (H.4.40). Khi đó, số đo của góc BAC được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ hay đơn giản là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



Hình 4.40

Chú ý

- Quy ước rằng góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .
- Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{u} \perp \vec{v}$ hoặc $\vec{v} \perp \vec{u}$.

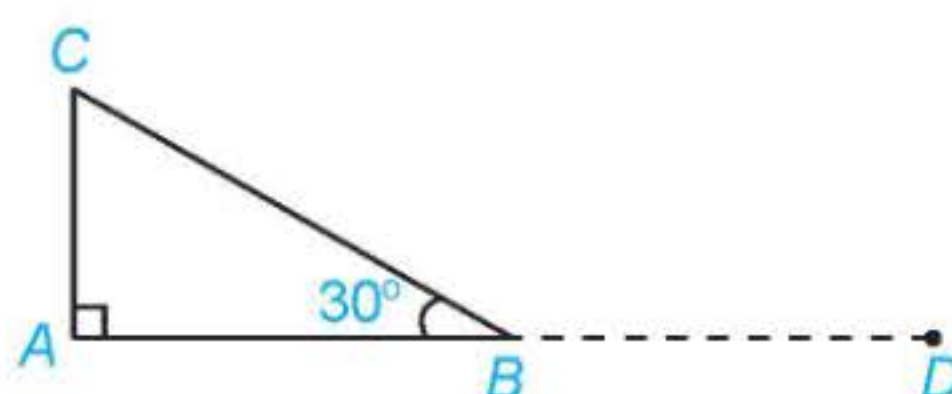
? Khi nào thì góc giữa hai vectơ bằng 0° , bằng 180° ?

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 30^\circ$.

Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Giải (H.4.41)

Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 90^\circ$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{ACB} = 60^\circ$,
 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{DBC} = 150^\circ$.



Hình 4.41

Luyện tập 1. Cho tam giác đều ABC . Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

Hình 4.42



Trong Vật lí, nếu lực $\vec{F}$ không đổi tác động vào một vật và điểm đặt của lực chuyển động thẳng từ M tới N , thì công A của lực $\vec{F}$ được tính theo công thức: $A = |\vec{F}| \cdot |\overline{MN}| \cdot \cos(\vec{F}, \overline{MN})$, trong đó $|\vec{F}|$ là độ lớn của lực $\vec{F}$ (theo đơn vị Newton);

$|\overline{MN}|$ là độ dài của vectơ $\overline{MN}$ (theo đơn vị mét);

$(\vec{F}, \overline{MN})$ là góc giữa hai vectơ $\vec{F}$ và $\overline{MN}$.

Toán học gọi giá trị A (không kể đơn vị đo) trong biểu thức nói trên là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{F}$ và $\overline{MN}$.

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

? Khi nào thì tích vô hướng của hai vectơ khác vectơ-không $\vec{u}, \vec{v}$ là một số dương? Là một số âm?

Chú ý

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u}$ còn được viết là $\vec{u}^2$ và được gọi là **bình phương vô hướng** của vectơ $\vec{u}$. Ta có $\vec{u}^2 = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$.

Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

? Khi nào thì $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2$?

» **Ví dụ 2.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a .

Tính các tích vô hướng sau: $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$, $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$, $\overline{AB} \cdot \overline{BD}$.

Giải. Vì $(\overline{AB}, \overline{AD}) = 90^\circ$ nên $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$.

Hình vuông có cạnh bằng a nên có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$.

Mặt khác, $(\overline{AB}, \overline{AC}) = 45^\circ$, $(\overline{AB}, \overline{BD}) = 135^\circ$, do đó

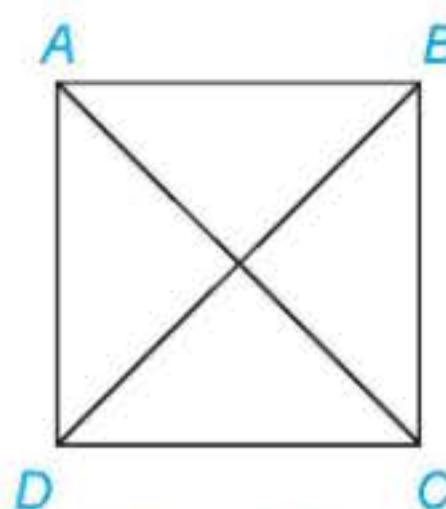
$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2;$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BD} = AB \cdot BD \cdot \cos 135^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2.$$

» **Luyện tập 2.** Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Hãy tính $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ theo a, b, c .

Hãy nhớ lại định lí côsin.



Hình 4.43



3. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

» **H02.** Cho hai vectơ cùng phương $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (kx; ky)$. Hãy kiểm tra công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = k(x^2 + y^2)$ theo từng trường hợp sau:

- $\vec{u} = \vec{0}$;
- $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $k \geq 0$;
- $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $k < 0$.

» **H03.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai vectơ không cùng phương $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$.

- Xác định toạ độ của các điểm A và B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
- Tính AB^2 , OA^2 , OB^2 theo toạ độ của A và B.
- Tính $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ theo toạ độ của A, B.

Đề ý rằng, theo định lí côsin, ta có:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2}.$$

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$ được tính theo công thức:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$



Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx' + yy' = 0$.
- Bình phương vô hướng của $\vec{u}(x; y)$ là $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$.
- Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

» **Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

- $\vec{u} = (2; -3)$ và $\vec{v} = (5; 3)$;
- Hai vectơ đơn vị $\vec{i}$ và $\vec{j}$ tương ứng của các trục Ox, Oy.

Giải

- Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 3 = 10 - 9 = 1$.
- Vì $\vec{i} = (1; 0)$ và $\vec{j} = (0; 1)$ nên $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

» **Luyện tập 3.** Tính tích vô hướng và góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (0; -5)$, $\vec{v} = (\sqrt{3}; 1)$.

» **H04.** Cho ba vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1)$, $\vec{v} = (x_2; y_2)$, $\vec{w} = (x_3; y_3)$.

- Tính $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$, $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ theo toạ độ của các vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
- So sánh $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- So sánh $\vec{u} \cdot \vec{v}$ và $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ bất kì và mọi số thực k , ta có:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (tính chất phân phối đối với phép cộng);
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.

Chú ý. Từ các tính chất trên, ta có thể chứng minh được:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (\text{tính chất phân phối đối với phép trừ});$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2; \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2;$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Trên các cạnh AB , AC lần lượt lấy các điểm P , Q . Chứng minh rằng $\widehat{PMQ} = 90^\circ$ khi và chỉ khi $BP + \sqrt{3}CQ = BC$.

Giải (H.4.44)

Đặt $MB = MC = a$.

Ta có $\widehat{PMQ} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CQ}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = 0. \quad (1)$$

Mặt khác,

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MB \cdot MC \cdot \cos 180^\circ = -a^2;$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CQ} = MB \cdot CQ \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot CQ;$$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{MC} = BP \cdot MC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a \cdot BP;$$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = BP \cdot CQ \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Do đó

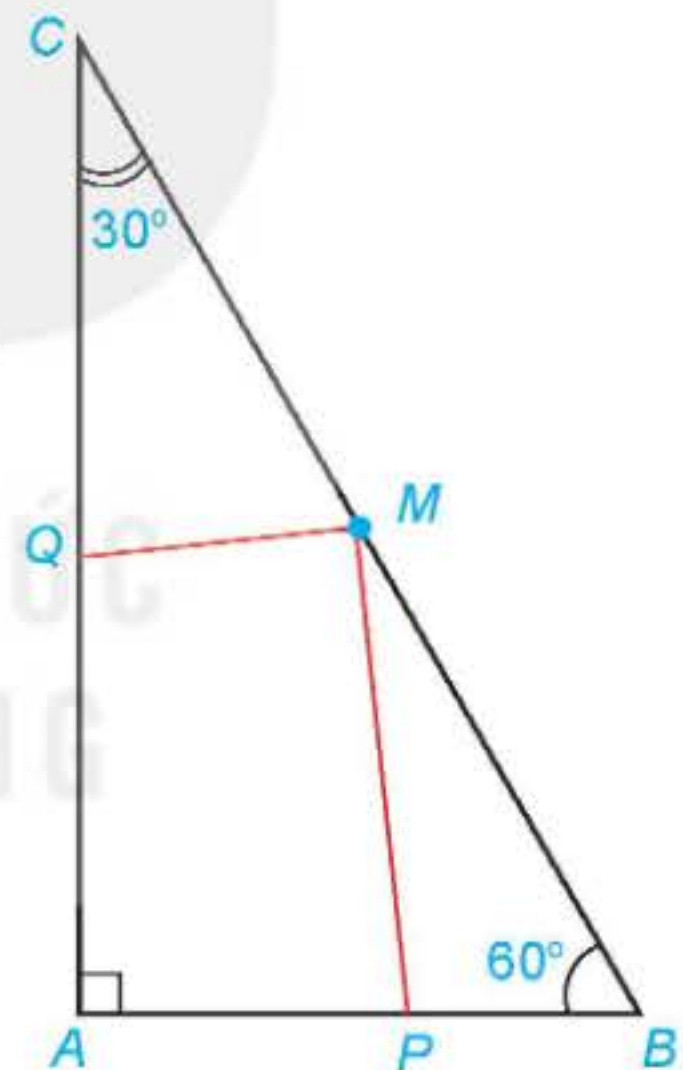
$$(1) \Leftrightarrow -a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot CQ + \frac{1}{2}a \cdot BP = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}CQ + \frac{1}{2}BP - a = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}CQ + BP = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}CQ + BP = BC.$$

Ta có điều phải chứng minh.



Hình 4.44

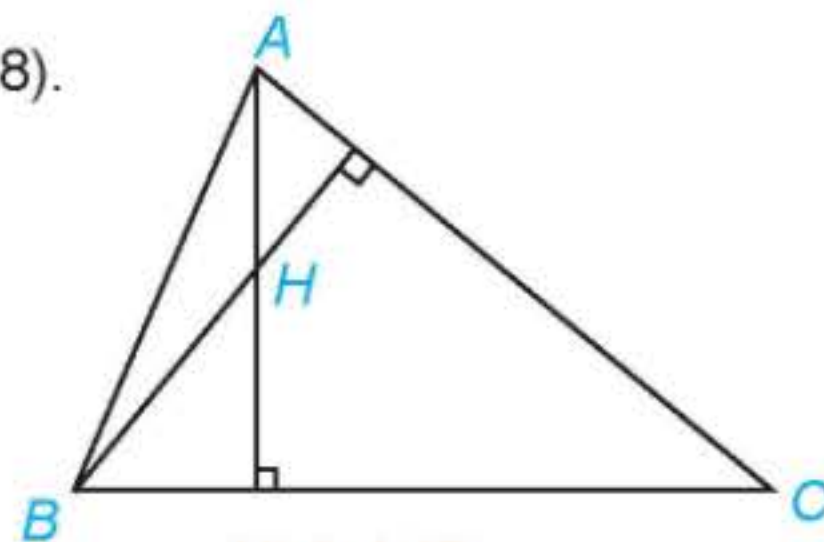
► **Luyện tập 4.** Cho tam giác ABC với $A(-1; 2)$, $B(8; -1)$, $C(8; 8)$.

Gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

b) Tìm toạ độ của H .

c) Giải tam giác ABC .

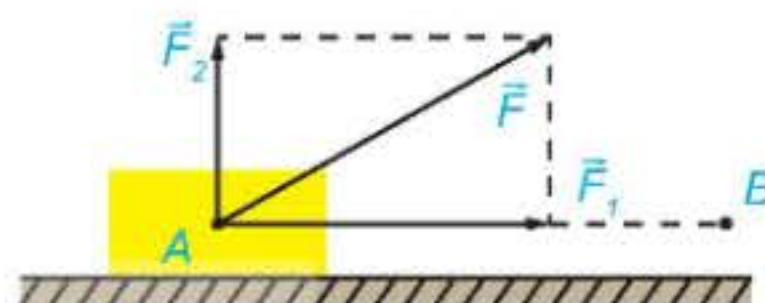


Hình 4.45

► **Vận dụng.** Một lực $\vec{F}$ không đổi tác động vào một vật và điểm đặt của lực chuyển động thẳng từ A đến B . Lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực thành phần là $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ ($\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$).

a) Dựa vào tính chất của tích vô hướng, hãy giải thích vì sao công sinh bởi lực $\vec{F}$ (đã được đề cập ở trên) bằng tổng của các công sinh bởi các lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$.

b) Giả sử các lực thành phần $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ tương ứng cùng phương, vuông góc với phương chuyển động của vật. Hãy tìm mối quan hệ giữa các công sinh bởi lực $\vec{F}$ và lực $\vec{F}_1$.



Hình 4.46

BÀI TẬP

4.21. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (-3; 1)$, $\vec{b} = (2; 6)$;

b) $\vec{a} = (3; 1)$, $\vec{b} = (2; 4)$;

c) $\vec{a} = (-\sqrt{2}; 1)$, $\vec{b} = (2; -\sqrt{2})$.

4.22. Tìm điều kiện của $\vec{u}$, $\vec{v}$ để:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

4.23. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(-4; 3)$. Gọi $M(t; 0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ theo t .

b) Tìm t để $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

4.24. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(2; -2)$.

a) Giải tam giác ABC .

b) Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC .

4.25. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}.$$

4.26. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M ,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$