

THUẬT NGỮ

- Tam thức bậc hai
- Dấu của tam thức bậc hai
- Bất phương trình bậc hai

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Giải thích định lý về dấu của tam thức bậc hai từ việc quan sát đồ thị của hàm bậc hai.
- Giải bất phương trình bậc hai.
- Vận dụng bất phương trình bậc hai vào giải quyết bài toán thực tiễn.

Xét bài toán rào vườn ở Bài 16, nhưng ta trả lời câu hỏi: Hai cột góc hàng rào (H.6.8) cần phải cách bờ tường bao nhiêu mét để mảnh đất được rào chắn có diện tích không nhỏ hơn 48 m^2 ?

1. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

» **HĐ1.** Hãy chỉ ra một vài đặc điểm chung của các biểu thức dưới đây:

$$A = 0,5x^2; \quad B = 1 - x^2; \quad C = x^2 + x + 1; \quad D = (1 - x)(2x + 1).$$

Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức có dạng $ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những số thực cho trước (với $a \neq 0$), được gọi là các hệ số của tam thức bậc hai.

Người ta thường viết $f(x) = ax^2 + bx + c$. Các đa thức đã cho trong HĐ1 là những tam thức bậc hai. Ở đa thức A , ta có $a = 0,5; b = 0; c = 0$.

» **Luyện tập 1.** Hãy cho biết biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai.

$$A = 3x + 2\sqrt{x} + 1; \quad B = -5x^4 + 3x^2 + 4; \quad C = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 4; \quad D = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\frac{1}{x} + 3.$$

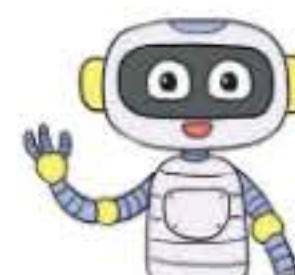
Chú ý

Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ cũng được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$.

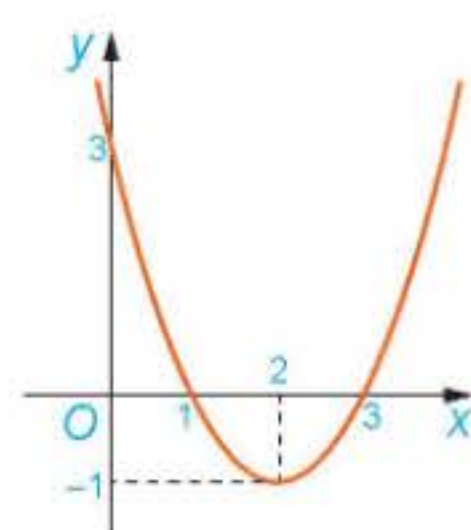
$\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b'^2 - ac$, với $b = 2b'$ tương ứng được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$.

» **HĐ2.** Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) Xác định hệ số a . Tính $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ và nhận xét về dấu của chúng so với dấu của hệ số a .



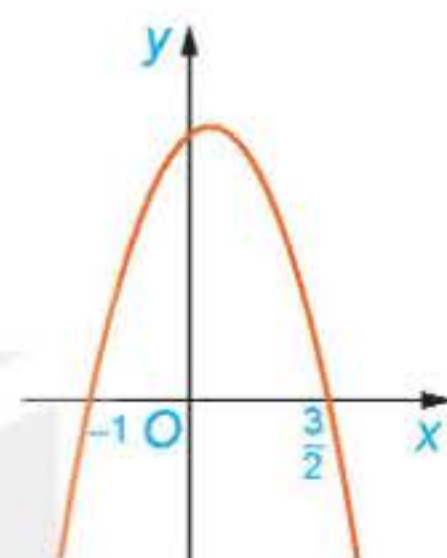
- b) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ (H.6.17). Xét trên từng khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; +\infty)$, đồ thị nằm phía trên hay nằm phía dưới trục Ox ?
- c) Nhận xét về dấu của $f(x)$ và dấu của hệ số a trên từng khoảng đó.



Hình 6.17

» **HĐ3.** Cho đồ thị hàm số $y = g(x) = -2x^2 + x + 3$ như Hình 6.18.

- a) Xét trên từng khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}; +\infty)$, đồ thị nằm phía trên trục Ox hay nằm phía dưới trục Ox ?
- b) Nhận xét về dấu của $g(x)$ và dấu của hệ số a trên từng khoảng đó.



Hình 6.18

Nhận xét

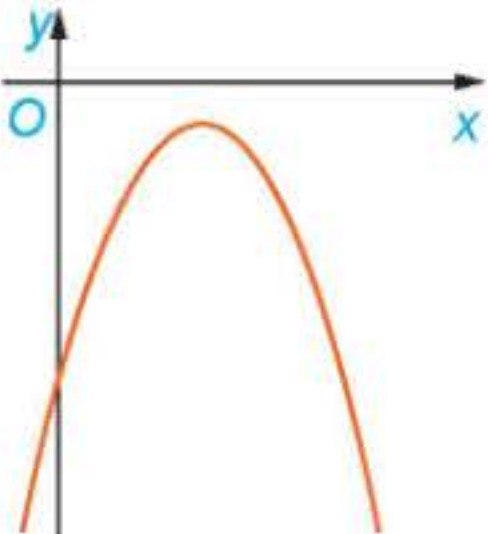
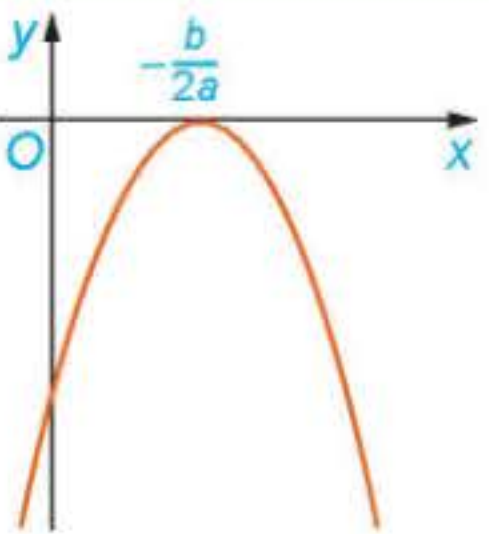
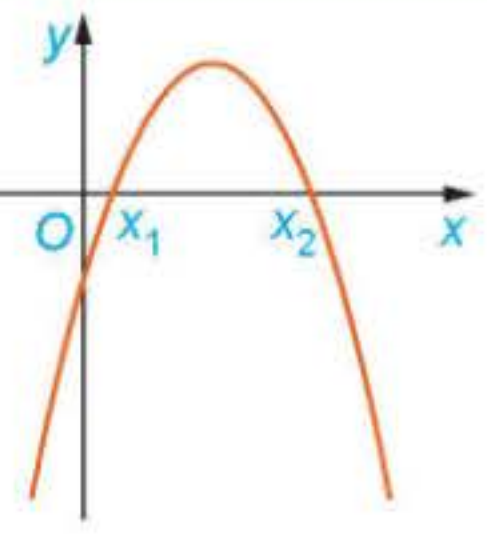
Từ HĐ2 và HĐ3 ta thấy, nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi giá trị $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ (ở ngoài đoạn hai nghiệm) và trái dấu với a với mọi giá trị $x \in (x_1; x_2)$ (ở trong khoảng hai nghiệm).

» **HĐ4.** Nêu nội dung thay vào ô có dấu “?” trong bảng sau cho thích hợp.

- Trường hợp $a > 0$

Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Dạng đồ thị			
Vị trí của đồ thị so với trục Ox	Đồ thị nằm hoàn toàn phía trên trục Ox .	Đồ thị nằm phía trên trục Ox và tiếp xúc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{2a}$.	– Đồ thị nằm phía trên trục Ox khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$. – Đồ thị nằm phía dưới trục Ox khi $x_1 < x < x_2$.

• Trường hợp $a < 0$

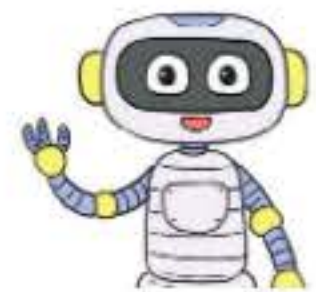
Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Dạng đồ thị			
Vị trí của đồ thị so với trục Ox	?	?	?

Mối quan hệ giữa dấu của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ với dấu của hệ số a trong từng trường hợp của Δ được phát biểu trong **định lý về dấu của tam thức bậc hai** sau đây.

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$ và $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó, $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi $x \in (x_1; x_2)$.

Khi $\Delta > 0$, dấu của $f(x)$ và a là: "Trong trái, ngoài cùng".



Chú ý. Trong định lý về dấu của tam thức bậc hai có thể thay Δ bởi Δ' .

» **Ví dụ 1.** Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

- a) $x^2 + x + 1$; b) $-\frac{3}{2}x^2 + 9x - \frac{27}{2}$; c) $2x^2 + 6x - 8$.

Giải

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ có $\Delta = -3 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 9x - \frac{27}{2}$ có $\Delta = 0$ và $a = -\frac{3}{2} < 0$ nên $f(x)$ có nghiệm kép $x = 3$ và $f(x) < 0$ với mọi $x \neq 3$.

c) Dễ thấy $f(x) = 2x^2 + 6x - 8$ có $\Delta' = 25 > 0$, $a = 2 > 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -4$; $x_2 = 1$. Do đó ta có bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	0	+

Suy ra $f(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ và $f(x) < 0$ với mọi $x \in (-4; 1)$.

» **Luyện tập 2.** Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $-3x^2 + x - \sqrt{2}$;

b) $x^2 + 8x + 16$;

c) $-2x^2 + 7x - 3$.

2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

» **HĐ5.** Trở lại tình huống mở đầu. Với yêu cầu mảnh đất được rào chắn có diện tích không nhỏ hơn 48 m^2 , hãy viết bất đẳng thức thể hiện sự so sánh biểu thức tính diện tích $S(x) = -2x^2 + 20x$ với 48.

Từ HĐ5, ta có $2x^2 - 20x + 48 \leq 0$ (1). Đây là một bất phương trình bậc hai.

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

- Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho và $a \neq 0$.
- Số thực x_0 gọi là một **nghiệm** của bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$, nếu $ax_0^2 + bx_0 + c > 0$. Tập hợp gồm tất cả các nghiệm của bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ gọi là **tập nghiệm** của bất phương trình này.
- Giải một bất phương trình bậc hai là tìm tập nghiệm của nó.

Nhận xét. Để giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$) ta cần xét dấu tam thức $ax^2 + bx + c$, từ đó suy ra tập nghiệm.

» **Ví dụ 2.** Giải các bất phương trình sau:

a) $3x^2 + x + 5 \leq 0$;

b) $-3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 \geq 0$;

c) $-x^2 + 2x + 1 > 0$.

Giải

a) Tam thức $f(x) = 3x^2 + x + 5$ có $\Delta = -59 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x)$ luôn dương (cùng dấu với a) với mọi x , tức là $3x^2 + x + 5 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

b) Tam thức $f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1$ có $\Delta' = 0$, hệ số $a = -3 < 0$ nên $f(x)$ có nghiệm kép $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, và $f(x)$ luôn âm (cùng dấu với a) với mọi $x \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, tức là $-3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 < 0$ với mọi $x \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Tam thức $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ có $\Delta' = 2 > 0$ nên $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ và $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Mặt khác $a = -1 < 0$, do đó ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$.

» **Ví dụ 3.** Giải bất phương trình (1), từ đó suy ra lời giải cho bài toán rào vườn ở tình huống mở đầu.

Giải

Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 20x + 48$ có hai nghiệm $x_1 = 4$; $x_2 = 6$ và hệ số $a = 2 > 0$. Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình (1) là đoạn $[4; 6]$. Như vậy khoảng cách từ điểm cắm cột đến bờ tường phải lớn hơn hoặc bằng 4 m và nhỏ hơn hoặc bằng 6 m thì mảnh đất rào chắn của bác Việt sẽ có diện tích không nhỏ hơn 48 m².

» **Luyện tập 3.** Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $-5x^2 + x - 1 \leq 0$; b) $x^2 - 8x + 16 \leq 0$; c) $x^2 - x - 6 > 0$.

» **Vận dụng.** Độ cao so với mặt đất của một quả bóng được ném lên theo phương thẳng đứng được mô tả bởi hàm số bậc hai $h(t) = -4,9t^2 + 20t + 1$, ở đó độ cao $h(t)$ tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Trong khoảng thời điểm nào trong quá trình bay của nó, quả bóng sẽ ở độ cao trên 5 m so với mặt đất?

Tìm hiểu thêm

Ta có thể dùng máy tính cầm tay để giải bất phương trình bậc hai. Sau khi mở máy, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

Mode	↓	1	1
------	---	---	---

Sau đó chọn một trong bốn dạng bất phương trình bậc hai rồi nhập các hệ số a, b, c , từ đó nhận được nghiệm.

Ví dụ để giải bất phương trình: $2x^2 - 3x - 6 \leq 0$ ta bấm tổ hợp phím

Mode	↓	1	1	4	2	=	-3	=	-6	=	=
------	---	---	---	---	---	---	----	---	----	---	---

Màn hình máy tính hiển thị: $\frac{3 - \sqrt{57}}{4} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{57}}{4}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\frac{3 - \sqrt{57}}{4}; \frac{3 + \sqrt{57}}{4} \right]$.

$A \leq X \leq B$
Math

$$\frac{3 - \sqrt{57}}{4} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{57}}{4}$$

BÀI TẬP

6.15. Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $3x^2 - 4x + 1$;

b) $x^2 + 2x + 1$;

c) $-x^2 + 3x - 2$;

d) $-x^2 + x - 1$.

6.16. Giải các bất phương trình bậc hai:

a) $x^2 - 1 \geq 0$;

b) $x^2 - 2x - 1 < 0$;

c) $-3x^2 + 12x + 1 \leq 0$;

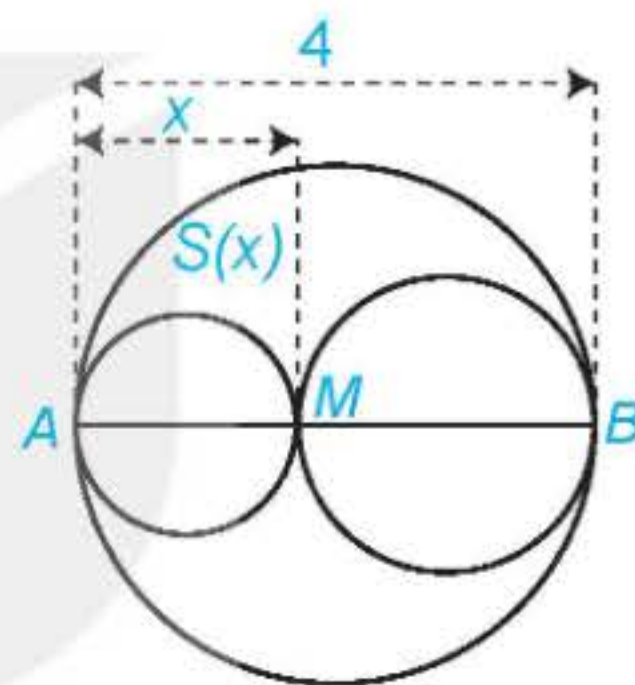
d) $5x^2 + x + 1 \geq 0$.

6.17. Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai sau dương với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + (m + 1)x + 2m + 3.$$

6.18. Một vật được ném theo phương thẳng đứng xuống dưới từ độ cao 320 m với vận tốc ban đầu $v_0 = 20$ m/s. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không quá 100 m? Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.

6.19. Xét đường tròn đường kính $AB = 4$ và một điểm M di chuyển trên đoạn AB , đặt $AM = x$ (H.6.19). Xét hai đường tròn đường kính AM và MB . Kí hiệu $S(x)$ là diện tích phần hình phẳng nằm trong hình tròn lớn và nằm ngoài hai hình tròn nhỏ. Xác định các giá trị của x để diện tích $S(x)$ không vượt quá một nửa tổng diện tích hai hình tròn nhỏ.



Hình 6.19

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG