

CHƯƠNG VII

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

Sau điểm và vector, những đối tượng khác của hình học phẳng như đường thẳng, đường tròn, ... sẽ lần lượt được đại số hoá ở chương này. Đối với mỗi đối tượng hình học đó, trước hết ta đưa ra đối tượng đại số tương ứng, được gọi là phương trình của nó. Các mối quan hệ, công thức tính toán hình học sẽ được thể hiện theo các yếu tố của phương trình tương ứng.

Nhờ đại số hoá hình học, ta có thể dùng ngôn ngữ và phương pháp của đại số để diễn đạt và học tập hình học. Ngoài ra, đại số hoá hình học là bước quan trọng cho phép ta dùng ngôn ngữ của máy tính để diễn đạt hình học. Nhờ đó, ta có thể sử dụng công nghệ thông tin trong học tập và áp dụng hình học, chẳng hạn, các phần mềm vẽ hình như GeoGebra (dùng trong học tập), Autocad (dùng trong vẽ thiết kế) đều sử dụng các kiến thức hình học.

Bài 19

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

THUẬT NGỮ

- Vector chỉ phương
- Vector pháp tuyến
- Phương trình tổng quát
- Phương trình tham số

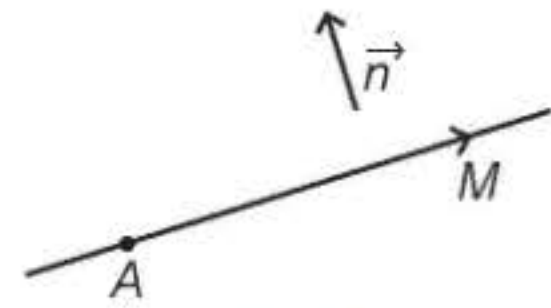
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Mô tả phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng.
- Lập phương trình của đường thẳng khi biết một điểm và một vector pháp tuyến hoặc một điểm và một vector chỉ phương hoặc hai điểm.
- Giải thích mối liên hệ giữa đồ thị hàm bậc nhất và đường thẳng.
- Vận dụng kiến thức về phương trình đường thẳng để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

Đường thẳng là một tập hợp điểm, được xác định bởi tính chất đặc trưng của các điểm thuộc đường thẳng đó. Do vậy, ta có thể đại số hoá đường thẳng bằng cách thể hiện tính chất đặc trưng đó bởi điều kiện đại số đối với toạ độ của các điểm tương ứng.

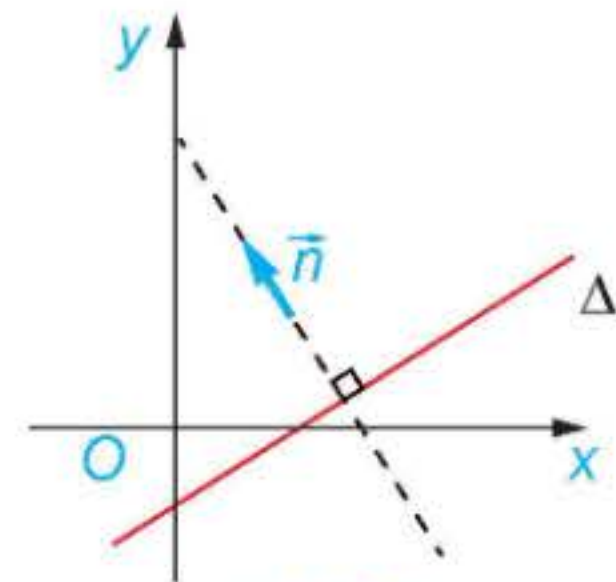
1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

» **HĐ1.** Cho vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ và điểm A . Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overline{AM}$ vuông góc với $\vec{n}$.



Hình 7.1a

Vector $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ được gọi là **vector pháp tuyến** của đường thẳng Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ .



Hình 7.1b

Nhận xét

- Nếu $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là vector pháp tuyến của Δ .
- Đường thẳng hoàn toàn xác định nếu biết một điểm và một vector pháp tuyến của nó.

» **Ví dụ 1.** Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác có ba đỉnh là $A(3; 1)$, $B(4; 0)$, $C(5; 3)$. Hãy chỉ ra một vector pháp tuyến của đường trung trực của đoạn thẳng AB và một vector pháp tuyến của đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

Giải

Đường trung trực của đoạn thẳng AB vuông góc với AB nên có một vector pháp tuyến là $\overline{AB}(1; -1)$.

Đường cao kẻ từ A của tam giác ABC vuông góc với BC nên có một vector pháp tuyến là $\overline{BC}(1; 3)$.

» **HĐ2.** Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n}(a; b)$. Chứng minh rằng điểm $M(x; y)$ thuộc Δ khi và chỉ khi

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (1)$$

Nhận xét

Trong HĐ2, nếu đặt $c = -ax_0 - by_0$ thì (1) còn được viết dưới dạng $ax + by + c = 0$ và được gọi là **phương trình tổng quát** của Δ . Như vậy, điểm $M(x; y)$ thuộc đường thẳng Δ khi và chỉ khi toạ độ của nó thoả mãn phương trình tổng quát của Δ .

Trong mặt phẳng toạ độ, mọi đường thẳng đều có **phương trình tổng quát** dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0. Ngược lại, mỗi phương trình dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0, đều là phương trình của một đường thẳng, nhận $\vec{n}(a; b)$ là một vector pháp tuyến.

» **Ví dụ 2.** Trong mặt phẳng toạ độ, lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; 1)$ và nhận $\vec{n}(3; 4)$ là một vector pháp tuyến.

Giải

Đường thẳng Δ có phương trình là $3(x - 2) + 4(y - 1) = 0$ hay $3x + 4y - 10 = 0$.

» **Luyện tập 1.** Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác có ba đỉnh $A(-1; 5)$, $B(2; 3)$, $C(6; 1)$. Lập phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

» **Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng toạ độ, lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0; b)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n}(a; -1)$, với a, b là các số cho trước. Hãy chỉ ra mối liên hệ giữa đường thẳng Δ với đồ thị của hàm số $y = ax + b$.

Giải

Đường thẳng Δ có phương trình là $a(x - 0) - 1(y - b) = 0$ hay $ax - y + b = 0$.

Đường thẳng Δ là tập hợp những điểm $M(x; y)$ thoả mãn $ax - y + b = 0$, hay là $y = ax + b$.

Do đó, đường thẳng $\Delta: ax - y + b = 0$ chính là đồ thị của hàm số $y = ax + b$.

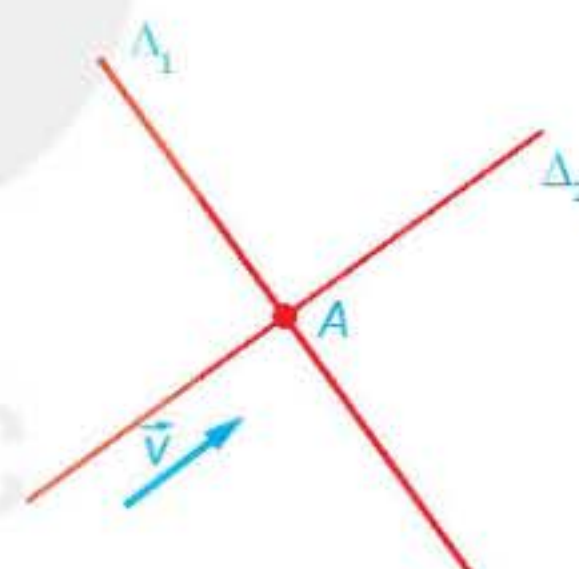
» **Luyện tập 2.** Hãy chỉ ra một vector pháp tuyến của đường thẳng $\Delta: y = 3x + 4$.

Nhận xét. Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

- Nếu $b = 0$ thì phương trình có thể đưa về dạng $x = m$ (với $m = -\frac{c}{a}$) và Δ vuông góc với Ox .
- Nếu $b \neq 0$ thì phương trình có thể đưa về dạng $y = nx + p$ (với $n = -\frac{a}{b}, p = -\frac{c}{b}$).

2. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

» **HĐ3.** Trong Hình 7.2a, nếu một vật thể chuyển động với vector vận tốc bằng $\vec{v}$ và đi qua A thì nó di chuyển trên đường nào?

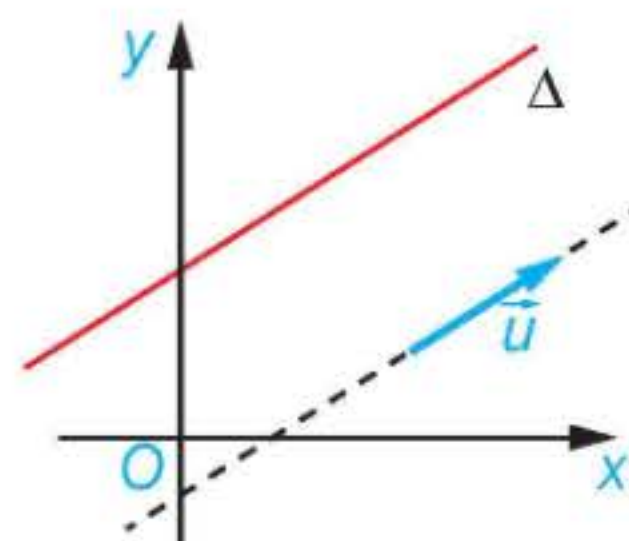


Hình 7.2a

Vector $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ được gọi là **vector chỉ phương** của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ .

Nhận xét

- Nếu $\vec{u}$ là vector chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là vector chỉ phương của Δ .
- Đường thẳng hoàn toàn xác định nếu biết một điểm và một vector chỉ phương của nó.
- Vector $\vec{n}(a; b)$ vuông góc với các vector $\vec{u}(-b; a)$ và $\vec{v}(b; -a)$ nên nếu $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vector chỉ phương của đường thẳng đó và ngược lại.



Hình 7.2b

» **Ví dụ 4.** Trong mặt phẳng toạ độ, cho $A(3; 2)$, $B(1; -4)$. Hãy chỉ ra hai vector chỉ phương của đường thẳng AB .

Giải

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}(-2; -6)$ là một vector chỉ phương.

Lấy $\vec{u} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1; 3)$, khi đó $\vec{u}$ cũng là một vector chỉ phương của đường thẳng AB .

» **Luyện tập 3.** Hãy chỉ ra một vector chỉ phương của đường thẳng $\Delta: 2x - y + 1 = 0$.

» **HĐ 4.** Chuyển động của một vật thể được thể hiện trên mặt phẳng Oxy . Vật thể khởi hành từ $A(2; 1)$ và chuyển động thẳng đều với vector vận tốc $\vec{v}(3; 4)$.

- Hỏi vật thể chuyển động trên đường thẳng nào (chỉ ra điểm đi qua và vector chỉ phương của đường thẳng đó)?
- Chứng minh rằng, tại thời điểm t ($t > 0$) tính từ khi khởi hành, vật thể ở vị trí có toạ độ là $(2 + 3t; 1 + 4t)$.

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}(a; b)$. Khi đó điểm $M(x; y)$ thuộc đường thẳng Δ khi và chỉ khi tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, hay

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \end{cases} \quad (2)$$

Hệ (2) được gọi là **phương trình tham số** của đường thẳng Δ (t là tham số).

» **Ví dụ 5.** Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; -3)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}(4; -1)$.

Giải

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 - t. \end{cases}$$

» **Luyện tập 4.** Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1; 2)$ và song song với đường thẳng $d: 3x - 4y - 1 = 0$.

» **Ví dụ 6.** Lập phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; 3)$ và $B(1; 5)$.

Giải

Đường thẳng AB đi qua $A(2; 3)$ và có vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-1; 2)$, do đó có phương trình

tham số là
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$$

» **Luyện tập 5.** Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ cho trước.

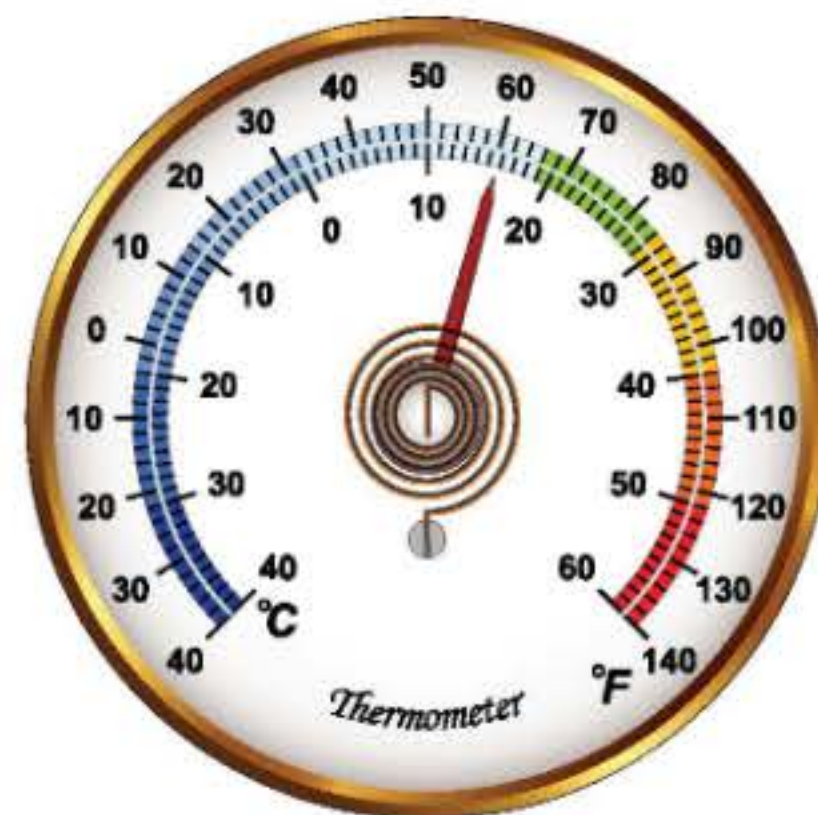
» **Vận dụng.** Việc quy đổi nhiệt độ giữa đơn vị độ C (Anders Celsius, 1701 – 1744) và đơn vị độ F (Daniel Fahrenheit, 1686 – 1736) được xác định bởi hai mốc sau:

Nước đóng băng ở 0°C , 32°F ;

Nước sôi ở 100°C , 212°F .

Trong quy đổi đó, nếu $a^{\circ}\text{C}$ tương ứng với $b^{\circ}\text{F}$ thì trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M(a; b)$ thuộc đường thẳng đi qua $A(0; 32)$ và $B(100; 212)$.

Hỏi 0°F , 100°F tương ứng với bao nhiêu độ C?



Nhiệt kế dùng hai đơn vị đo là độ F và độ C

BÀI TẬP

7.1. Trong mặt phẳng tọa độ, cho $\vec{n} = (2; 1)$, $\vec{v} = (3; 2)$, $A(1; 3)$, $B(-2; 1)$.

- Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_1 đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.
- Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ_2 đi qua B và có vectơ chỉ phương $\vec{v}$.
- Lập phương trình tham số của đường thẳng AB .

7.2. Lập phương trình tổng quát của các trục tọa độ.

7.3. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$ và $\Delta_2: 2x + 3y - 5 = 0$.

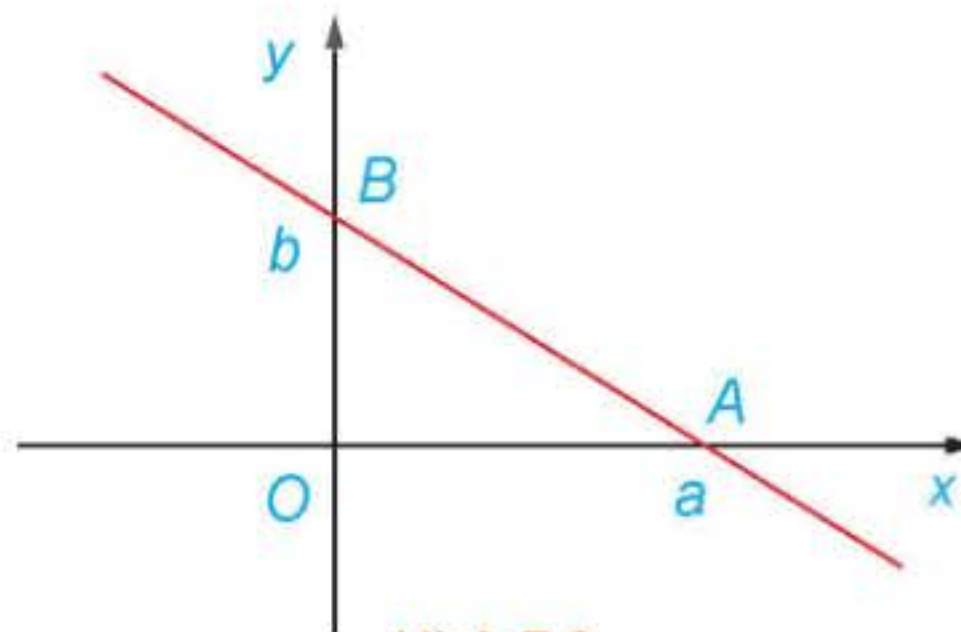
- Lập phương trình tổng quát của Δ_1 .
- Lập phương trình tham số của Δ_2 .

7.4. Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(3; 0)$ và $C(-2; -1)$.

- Lập phương trình đường cao kẻ từ A .
- Lập phương trình đường trung tuyến kẻ từ B .

7.5. (Phương trình đoạn chắn của đường thẳng)
Chứng minh rằng, đường thẳng đi qua hai điểm $A(a; 0)$, $B(0; b)$ với $ab \neq 0$ (H.7.3) có phương trình là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



Hình 7.3

7.6. Theo Google Maps, sân bay Nội Bài có vĩ độ $21,2^{\circ}$ Bắc, kinh độ $105,8^{\circ}$ Đông, sân bay Đà Nẵng có vĩ độ $16,1^{\circ}$ Bắc, kinh độ $108,2^{\circ}$ Đông. Một máy bay, bay từ sân bay Nội Bài đến sân bay Đà Nẵng. Tại thời điểm t giờ, tính từ lúc xuất phát, máy bay ở vị trí có vĩ độ x° Bắc, kinh độ y° Đông được tính theo công thức

$$\begin{cases} x = 21,2 - \frac{153}{40}t \\ y = 105,8 + \frac{9}{5}t. \end{cases}$$

- a) Hối chuyến bay từ Hà Nội đến Đà Nẵng mất mấy giờ?
b) Tại thời điểm 1 giờ kể từ lúc cất cánh, máy bay đã bay qua vĩ tuyến 17 (17° Bắc) chưa?

Em có biết?

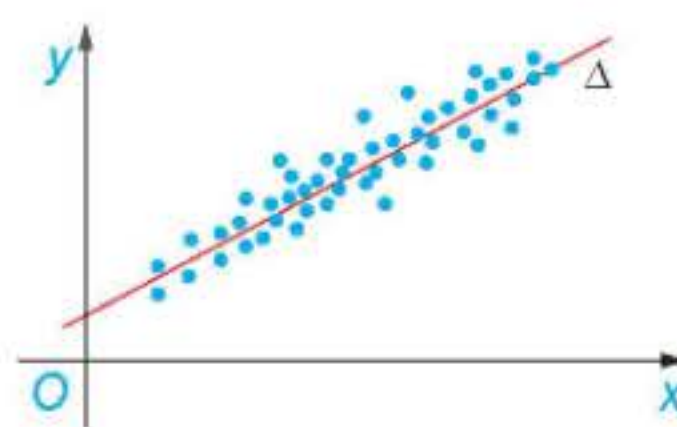
Hồi quy tuyến tính là một phương pháp được sử dụng trong thống kê để dự báo về mối quan hệ giữa các đại lượng dựa trên kết quả thống kê mẫu. Chẳng hạn, để dự báo về mối quan hệ giữa hai đại lượng x và y (y phụ thuộc vào x như thế nào), từ kết quả thống kê được thể hiện ở Hình 7.4a, phương pháp hồi quy tuyến tính đưa ra đường thẳng Δ (H.7.4b) thể hiện gần đúng nhất mối quan hệ giữa các đại lượng x và y đã được thống kê. Về mặt hình ảnh, các chấm xanh trên hình vẽ (có tọa độ là các cặp giá trị $(x; y)$ trong kết quả thống kê, tập trung dọc theo Δ .

Để xác định Δ (phương trình $y = ax + b$), người ta thường dùng tiêu chuẩn gọi là bình phương nhỏ nhất như sau: Với mỗi cặp $(x_0; y_0)$ trong kết quả thống kê, xét bình phương khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến $M'(x_0; ax_0 + b)$. Khi đó, a, b được chọn sao cho tổng các bình phương này là nhỏ nhất.

Nhờ đưa ra được đường thẳng biểu thị (gần đúng) sự phụ thuộc giữa đại lượng y theo đại lượng x , người ta có thể đưa ra các dự báo nằm ngoài kết quả thống kê. Tất nhiên, không phải mô hình nào cũng phù hợp với phương pháp này, ngay cả khi kết quả thống kê tập trung dọc một đường thẳng. Chẳng hạn, để xác định đường đi của một quả tên lửa, nếu dựa vào một số quan sát ban đầu để dự đoán, ta có thể nghĩ rằng nó chuyển động thẳng, nhưng trên thực tế, nhìn chung nó đi theo đường parabol. Sai lầm trong những dự báo như vậy thật là tai hại!



a)



b)

Hình 7.4