

THUẬT NGỮ

- Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng
- Góc, khoảng cách

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết hai đường thẳng cắt nhau, song song, trùng nhau, vuông góc.
- Thiết lập công thức tính góc giữa hai đường thẳng.
- Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.
- Vận dụng các công thức tính góc và khoảng cách để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

Trong mặt phẳng toạ độ, mỗi đường thẳng đều có đối tượng đại số tương ứng, gọi là phương trình của nó. Vậy các yếu tố liên quan tới đường thẳng được thể hiện như thế nào qua phương trình tương ứng?

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

» **H01.** Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: x - 2y + 3 = 0,$$

$$\Delta_2: 3x - y - 1 = 0.$$

a) Điểm $M(1; 2)$ có thuộc cả hai đường thẳng nói trên hay không?

b) Giải hệ
$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

c) Chỉ ra mối quan hệ giữa toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 với nghiệm của hệ phương trình trên.

Nhận xét. Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ là tập hợp những điểm có toạ độ thoả mãn phương trình của đường thẳng đó. Vì vậy, bài toán tìm giao điểm của hai đường thẳng được quy về bài toán giải hệ gồm hai phương trình tương ứng.

Trên mặt phẳng toạ độ, xét hai đường thẳng

$$\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } \Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Khi đó, toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Δ_1 cắt Δ_2 tại $M(x_0; y_0)$ khi và chỉ khi hệ (*) có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$.

Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (*) vô nghiệm.

Δ_1 trùng Δ_2 khi và chỉ khi hệ (*) có vô số nghiệm.

Chú ý



Hình 7.5

Dựa vào các vectơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ hoặc các vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ của Δ_1, Δ_2 , ta có:

- Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng phương.
- Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương $\Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

» **Ví dụ 1.** Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng $\Delta: x - \sqrt{2}y + 4\sqrt{3} = 0$ và mỗi đường thẳng sau:

$$\Delta_1: \sqrt{3}x - \sqrt{6}y + 12 = 0;$$

$$\Delta_2: \sqrt{2}x - 2y = 0.$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x - \sqrt{2}y + 4\sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{3}(x - \sqrt{2}y + 4\sqrt{3}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{6}y + 12 = 0. \end{aligned}$$

Vậy Δ và Δ_1 là một, nói cách khác chúng trùng nhau.

Hai đường thẳng Δ và Δ_2 có hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1; -\sqrt{2})$ và $\vec{n}_2(\sqrt{2}; -2)$ cùng phương. Do đó, chúng song song hoặc trùng nhau. Mặt khác, điểm $O(0; 0)$ thuộc đường thẳng Δ_2 nhưng không thuộc đường thẳng Δ , nên hai đường thẳng này không trùng nhau.

Vậy Δ và Δ_2 song song với nhau.

Nhận xét. Giả sử hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có hai vectơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ (hay hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1, \vec{n}_2$) cùng phương. Khi đó:

- Nếu Δ_1 và Δ_2 có điểm chung thì Δ_1 trùng Δ_2 ;
- Nếu tồn tại điểm thuộc Δ_1 nhưng không thuộc Δ_2 thì Δ_1 song song với Δ_2 .

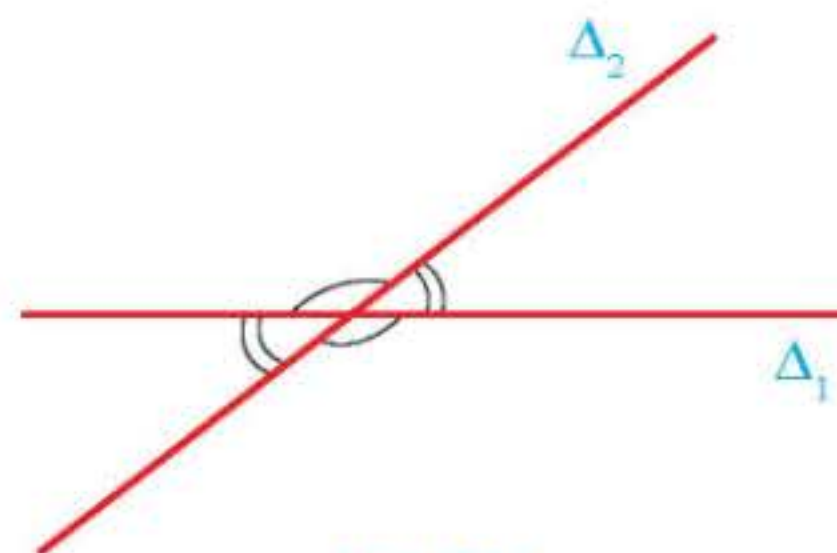
» **Luyện tập 1.** Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $\Delta_1: x + 4y - 3 = 0$ và $\Delta_2: x - 4y - 3 = 0$;

b) $\Delta_1: x + 2y - \sqrt{5} = 0$ và $\Delta_2: 2x + 4y - 3\sqrt{5} = 0$.

2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

» **H02.** Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc (H.7.6). Các số đo của bốn góc đó có mối quan hệ gì với nhau?



Hình 7.6

Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành bốn góc, số đo của góc không tù được gọi là số đo góc (hay đơn giản là góc) giữa hai đường thẳng.

Góc giữa hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau được quy ước bằng 0° .

HĐ3. Cho hai đường thẳng cắt nhau Δ_1, Δ_2 tương ứng có các vector pháp tuyến $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng đó (H.7.7). Nêu mối quan hệ giữa:

a) góc φ và góc $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$;

b) $\cos \varphi$ và $\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$.



Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } \Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

với các vector pháp tuyến $\vec{n}_1(a_1; b_1)$ và $\vec{n}_2(a_2; b_2)$ tương ứng. Khi đó, góc φ giữa hai đường thẳng đó được xác định thông qua công thức

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Chú ý

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.
- Nếu Δ_1, Δ_2 có các vector chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì góc φ giữa Δ_1 và Δ_2 cũng được xác định thông qua công thức $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right|$.

Ví dụ 2. Tính góc giữa hai đường thẳng

$$\Delta_1: \sqrt{3}x - y + 2 = 0 \text{ và } \Delta_2: x - \sqrt{3}y - 2 = 0.$$

Giải

Vector pháp tuyến của Δ_1 là $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}; -1)$, của Δ_2 là $\vec{n}_2 = (1; -\sqrt{3})$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Ta có

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|\sqrt{3} \cdot 1 + (-1) \cdot (-\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó, góc giữa Δ_1 và Δ_2 là $\varphi = 30^\circ$.

» **Luyện tập 2.** Tính góc giữa hai đường thẳng

$$\Delta_1: x + 3y + 2 = 0 \text{ và } \Delta_2: y = 3x + 1.$$

» **Ví dụ 3.** Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: x = 3$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \end{cases}$

Giải

Đường thẳng Δ_1 có phương trình $x - 3 = 0$ nên có vector pháp tuyến $\vec{n}_1(1; 0)$. Đường thẳng Δ_2 có vector chỉ phương $\vec{u}_2(-1; 1)$ nên có vector pháp tuyến $\vec{n}_2(1; 1)$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 , ta có

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

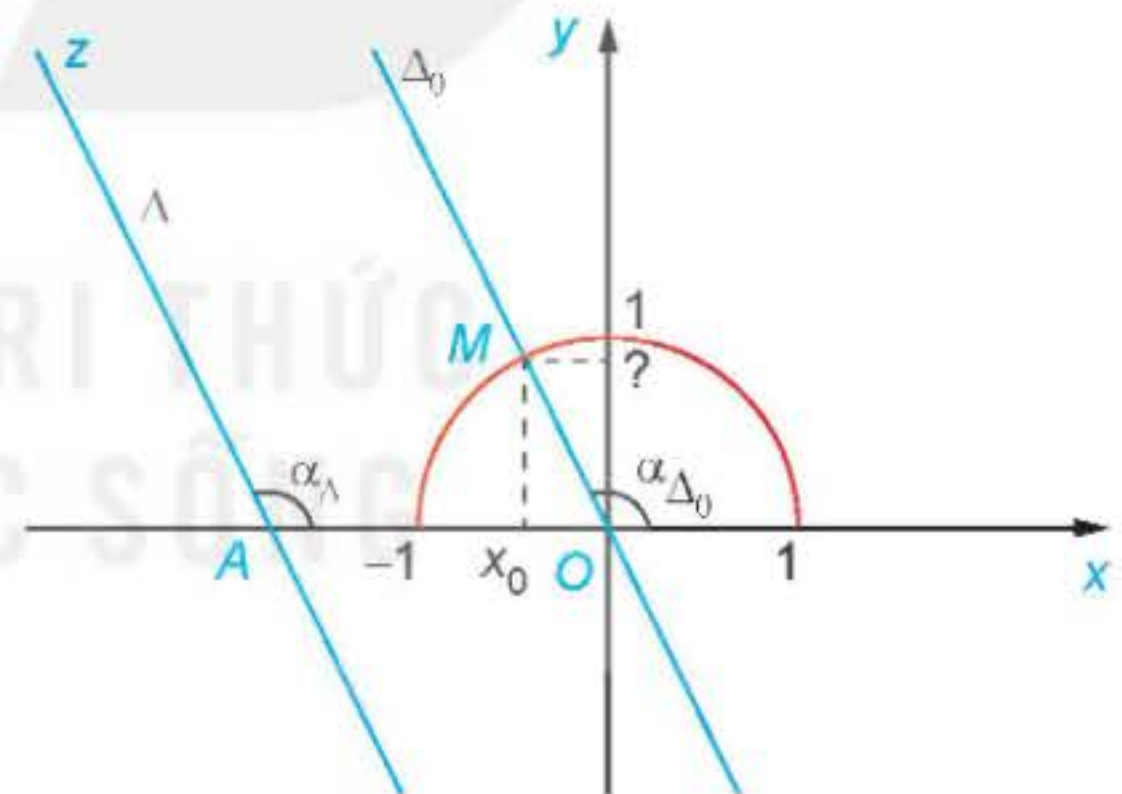
Do đó, góc giữa Δ_1 và Δ_2 là $\varphi = 45^\circ$.

» **Luyện tập 3.** Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 5 + 3t' \end{cases}$.

Xét đường thẳng Δ bất kì cắt trục hoành Ox tại một điểm A . Điểm A chia đường thẳng Δ thành hai tia, trong đó, gọi Az là tia nằm phía trên trục hoành. Kí hiệu α_Δ là số đo của góc $\widehat{xAz}$ (H.7.8). Qua luyện tập sau, ta sẽ thấy ý nghĩa hình học của hệ số góc.

» **Luyện tập 4.** Cho đường thẳng $\Delta: y = ax + b$, với $a \neq 0$.

- Chứng minh rằng Δ cắt trục hoành.
- Lập phương trình đường thẳng Δ_0 đi qua $O(0; 0)$ và song song (hoặc trùng) với Δ .
- Hãy chỉ ra mối quan hệ giữa α_Δ và α_{Δ_0} .
- Gọi M là giao điểm của Δ_0 với nửa đường tròn đơn vị và x_0 là hoành độ của M . Tính tung độ của M theo x_0 và a . Từ đó, chứng minh rằng $\tan \alpha_\Delta = a$.

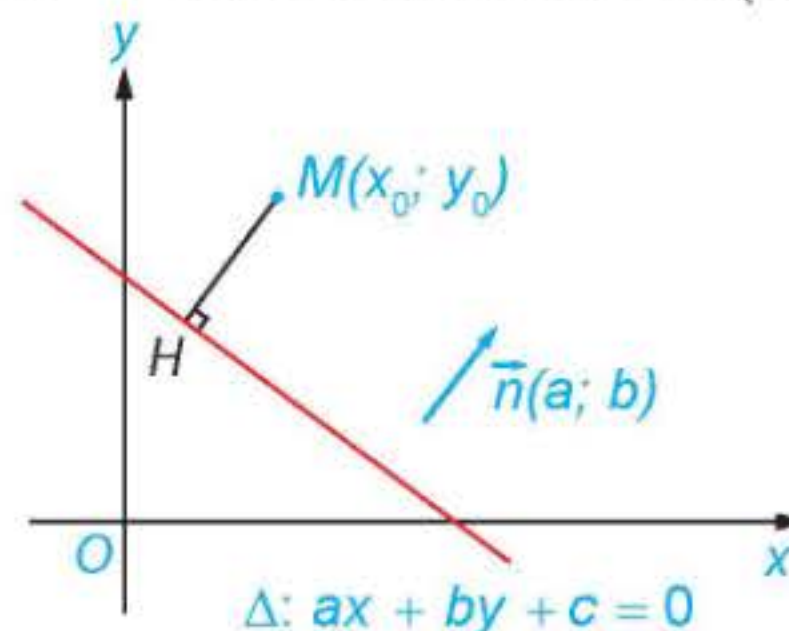


Hình 7.8

3. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

» **HĐ 4.** Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}(a; b)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ (H.7.9).

- Chứng minh rằng $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot HM$.
- Giả sử H có tọa độ $(x_1; y_1)$. Chứng minh rằng:
 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = ax_0 + by_0 + c$.
- Chứng minh rằng $HM = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.



Hình 7.9

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ , kí hiệu là $d(M, \Delta)$, được tính bởi công thức

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

» **Ví dụ 4.** Tính khoảng cách từ điểm $M(2; 4)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 12 = 0$.

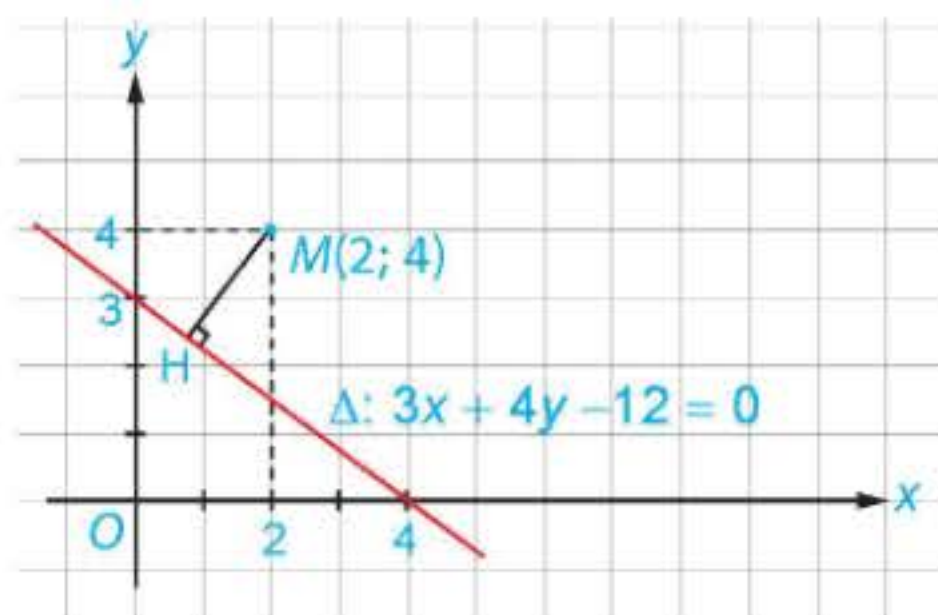
Giải

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ , ta có

$$d(M, \Delta) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Vậy khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là 2.

» **Trải nghiệm.** Đo trực tiếp khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ (H.7.10) và giải thích vì sao kết quả đo đạc đó phù hợp với kết quả tính toán trong lời giải của Ví dụ 4.

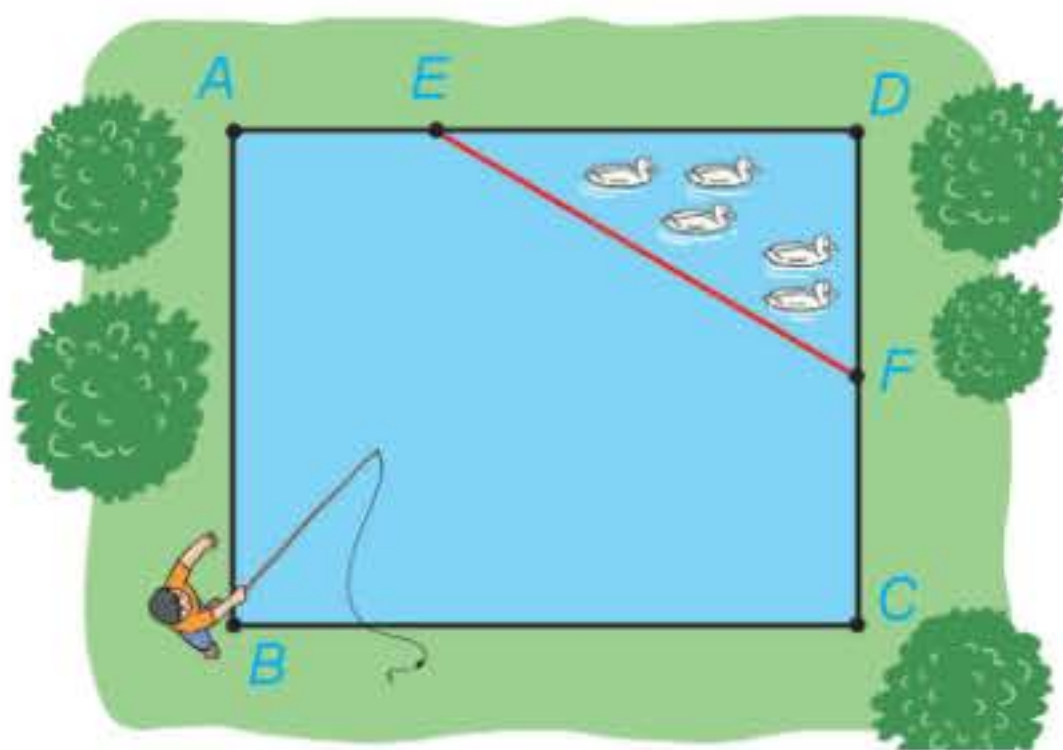


Hình 7.10

» **Luyện tập 5.** Tính khoảng cách từ điểm $M(1; 2)$ đến đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -5 - 4t. \end{cases}$$

» **Vận dụng.** Nhân dịp nghỉ hè, Nam về quê ở với ông bà nội. Nhà ông bà nội có một ao cá có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài $AD = 15$ m, chiều rộng $AB = 12$ m. Phần tam giác DEF là nơi ông bà nuôi vịt, $AE = 5$ m, $CF = 6$ m (H.7.11).



Hình 7.11

- Chọn hệ trục tọa độ Oxy , có điểm O trùng với điểm B , các tia Ox , Oy tương ứng trùng với các tia BC , BA . Chọn 1 đơn vị độ dài trên mặt phẳng tọa độ tương ứng với 1 m trong thực tế. Hãy xác định tọa độ của các điểm A , B , C , D , E , F và viết phương trình đường thẳng EF .
- Nam đứng ở vị trí B câu cá và có thể quăng lưới câu xa 10,7 m. Hỏi lưới câu có thể rơi vào nơi nuôi vịt hay không?

BÀI TẬP

7.7. Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau:

- $\Delta_1: 3\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \sqrt{3} = 0$ và $\Delta_2: 6x + 2y - \sqrt{6} = 0$.
- $d_1: x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ và $d_2: \sqrt{3}x - 3y + 2 = 0$.
- $m_1: x - 2y + 1 = 0$ và $m_2: 3x + y - 2 = 0$.

7.8. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

- $\Delta_1: \sqrt{3}x + y - 4 = 0$ và $\Delta_2: x + \sqrt{3}y + 3 = 0$;
- $d_1: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 - 3s \end{cases}$ (t, s là các tham số).

7.9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(0; -2)$ và đường thẳng $\Delta: x + y - 4 = 0$.

- Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ .
- Viết phương trình đường thẳng a đi qua điểm $M(-1; 0)$ và song song với Δ .
- Viết phương trình đường thẳng b đi qua điểm $N(0; 3)$ và vuông góc với Δ .

7.10. Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC có $A(1; 0)$, $B(3; 2)$ và $C(-2; -1)$.

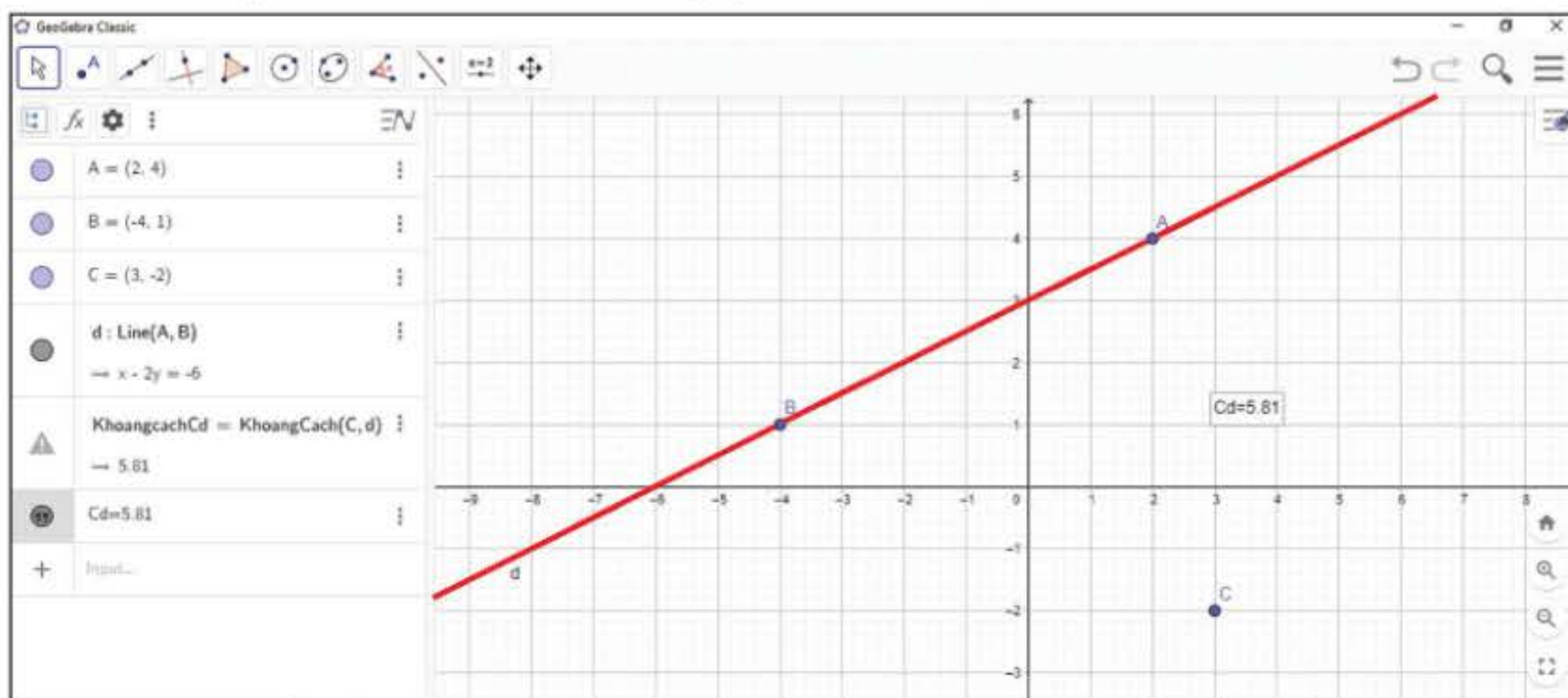
- Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC .
- Tính diện tích tam giác ABC .

7.11. Chứng minh rằng hai đường thẳng $d: y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $d': y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) vuông góc với nhau khi và chỉ khi $aa' = -1$.

7.12. Trong mặt phẳng tọa độ, một tín hiệu âm thanh phát đi từ một vị trí và được ba thiết bị ghi tín hiệu đặt tại ba vị trí $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 3)$ nhận được cùng một thời điểm. Hãy xác định vị trí phát tín hiệu âm thanh.

Em có biết?

Cơ sở toán học cho các tính toán trong phần mềm GeoGebra.



Hình 7.12

Hình 7.12 được chụp lại từ một màn hình máy tính đang sử dụng phần mềm vẽ hình GeoGebra:

- Chọn chức năng vẽ điểm, sau đó, nháy chuột vào ba điểm A, B, C trên cửa sổ màn hình, phần mềm tự động xác định tọa độ của ba điểm đó là A(2; 4), B(-4; 1), C(3; -2).
- Chọn chức năng vẽ đường thẳng đi qua hai điểm, sau đó, nháy vào hai điểm A, B ta được đường thẳng đi qua hai điểm A, B; phần mềm tự động xác định được phương trình của đường thẳng là $x - 2y + 6 = 0$.
- Chọn chức năng tính khoảng cách, sau đó, nháy vào điểm C và đường thẳng AB, phần mềm sẽ tự động cho ta khoảng cách từ C tới đường thẳng đó là 5,81.

Cơ sở toán học để phần mềm có được tính toán nói trên là công thức đã được nêu trong bài học này.