

THUẬT NGỮ

- Cấp số cộng
- Công sai
- Số hạng tổng quát
- Tổng của n số hạng đầu

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết một dãy số là cấp số cộng.
- Giải thích công thức xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng.
- Tính tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với cấp số cộng.

Một nhà hát có 25 hàng ghế với 16 ghế ở hàng thứ nhất, 18 ghế ở hàng thứ hai, 20 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật đó, tức là hàng sau nhiều hơn hàng liền trước nó 2 ghế. Tính tổng số ghế của nhà hát đó.



1. ĐỊNH NGHĨA

» H01. Nhận biết cấp số cộng

Cho dãy số (u_n) gồm tất cả các số tự nhiên lẻ, xếp theo thứ tự tăng dần.

- Viết năm số hạng đầu của dãy số.
- Dự đoán công thức biểu diễn số hạng u_n theo số hạng u_{n-1} .

- **Cấp số cộng** là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d . Số d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.
- Cấp số cộng (u_n) với công sai d được cho bởi hệ thức truy hồi

$$u_n = u_{n-1} + d \text{ với } n \geq 2.$$



Dãy số không đổi $a, a, a, \dots$ có phải là một cấp số cộng không?

» **Ví dụ 1.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Hãy viết năm số hạng đầu của cấp số cộng này.

Giải

Năm số hạng đầu của cấp số cộng này là:

$$u_1 = 2, u_2 = u_1 + d = 2 + 3 = 5, u_3 = u_2 + d = 5 + 3 = 8, \\ u_4 = u_3 + d = 8 + 3 = 11, u_5 = u_4 + d = 11 + 3 = 14.$$

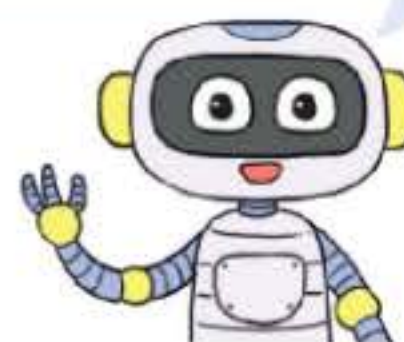
» **Ví dụ 2.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = 5n - 1$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của nó.

Giải

Ta có $u_n - u_{n-1} = (5n - 1) - [5(n - 1) - 1] = 5$, với mọi $n \geq 2$.

Do đó (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 5 \cdot 1 - 1 = 4$ và công sai $d = 5$.

Để chứng minh (u_n) là một cấp số cộng, hãy chứng minh hiệu hai số hạng liên tiếp $u_n - u_{n-1}$ không đổi.



» **Luyện tập 1.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng này.

2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

» **HĐ2.** Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng

Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu u_1 và công sai d .

- Tính các số hạng u_2, u_3, u_4, u_5 theo u_1 và d .
- Dự đoán công thức tính số hạng tổng quát u_n theo u_1 và d .

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì **số hạng tổng quát** u_n của nó được xác định theo công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d.$$

» **Ví dụ 3.** Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số cộng (u_n) : 10, 5, ...

Giải

Cấp số cộng này có số hạng đầu $u_1 = 10$ và công sai $d = 5 - 10 = -5$.

Do đó năm số hạng đầu là: 10, 5, 0, -5, -10.

Số hạng thứ 100 là $u_{100} = u_1 + (100 - 1)d = 10 + 99 \cdot (-5) = -485$.

» **Ví dụ 4.** Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.

Giải

Giả sử u_1 là số hạng đầu và d là công sai của cấp số cộng đó. Ta có:

$$u_{10} = u_1 + 9d = 48$$

$$u_{18} = u_1 + 17d = 88.$$

Giải hệ này ta được $u_1 = 3$ và $d = 5$.

Vậy số hạng thứ 100 của cấp số cộng này là $u_{100} = u_1 + 99d = 3 + 99 \cdot 5 = 498$.

» **Luyện tập 2.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = 4n - 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng này. Từ đó viết số hạng tổng quát u_n dưới dạng $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

3. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

» HỌ3. Xây dựng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng

Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu u_1 và công sai d .

Để tính **tổng của n số hạng đầu**

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n,$$

hãy lần lượt thực hiện các yêu cầu sau:

- Biểu diễn mỗi số hạng trong tổng S_n theo số hạng đầu u_1 và công sai d .
- Viết S_n theo thứ tự ngược lại: $S_n = u_n + u_{n-1} + \dots + u_2 + u_1$ và sử dụng kết quả ở phần a) để biểu diễn mỗi số hạng trong tổng này theo u_1 và d .
- Cộng từng vế hai đẳng thức nhận được ở a), b), để tính S_n theo u_1 và d .

Cho cấp số cộng (u_n) với công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d].$$

Chú ý. Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có thể viết tổng S_n dưới dạng

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.$$

» Ví dụ 5. Giải bài toán ở tình huống mở đầu.

Giải. Số ghế ở mỗi hàng của nhà hát lập thành một cấp số cộng, gồm 25 số hạng, với số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = 2$. Tổng các số hạng này là

$$S_{25} = u_1 + u_2 + \dots + u_{25} = \frac{25}{2} [2u_1 + (25-1)d] = \frac{25}{2} [2 \cdot 16 + 24 \cdot 2] = 1\,000.$$

Vậy nhà hát đó có tổng cộng 1 000 ghế.

» Ví dụ 6. Cần lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng 2, 5, 8, ... để được kết quả bằng 345?

Giải

Cấp số cộng này có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có

$$345 = S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 3] = \frac{n}{2} (3n + 1).$$

Do đó $3n^2 + n - 690 = 0$. Giải phương trình bậc hai này ta được $n = -\frac{230}{15}$ (loại) và $n = 15$.

Vậy phải lấy tổng của 15 số hạng đầu của cấp số cộng đã cho để được tổng bằng 345.

» Vận dụng. Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

Góc công nghệ

Kí hiệu tổng Σ và cách tính tổng bằng máy tính cầm tay

Cho dãy số (u_n) . Tổng n số hạng đầu của dãy số này: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ được kí hiệu ngắn gọn như sau: $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ (kí hiệu Σ đọc là xích ma).

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính tổng n số hạng liên tiếp của một dãy số khi biết công thức của số hạng tổng quát.

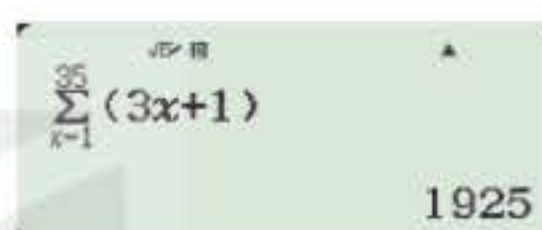
Chẳng hạn, cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n + 1$.

Để tính tổng 35 số hạng đầu của dãy số đó, ta có thể dùng máy tính cầm tay, nhấn lần lượt các phím: SHIFT $\rightarrow$ x, [SHIFT] $\left[\begin{smallmatrix} \Sigma \\ \square \end{smallmatrix} \right]$.

Khi đó màn hình hiện ra như hình bên, lưu ý rằng giao diện máy tính mặc định là x, ở đây được hiểu là n trong công thức số hạng tổng quát.


$$\sum_{x=1} (\square)$$

Tiếp theo ta nhập công thức số hạng tổng quát vào trong ngoặc (), rồi nhấn $\downarrow$ để nhập giá trị đầu tiên của x (ở đây là 1), sau đó nhấn $\uparrow$ để nhập giá trị cuối cùng của x (trường hợp này là 35), cuối cùng nhấn phím [=]. Khi đó, màn hình sẽ hiển thị kết quả cần tính như hình bên.


$$\sum_{x=1}^{35} (3x+1)$$

1925

BÀI TẬP

- 2.8.** Xác định công sai, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số cộng sau:
- a) 4, 9, 14, 19, ...; b) 1, -1, -3, -5, ...
- 2.9.** Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số (u_n) sau và xét xem nó có phải là cấp số cộng không. Nếu dãy số đó là cấp số cộng, hãy tìm công sai d và viết số hạng tổng quát của nó dưới dạng $u_n = u_1 + (n-1)d$.
- a) $u_n = 3 + 5n$; b) $u_n = 6n - 4$; c) $u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + n$; d) $u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + 3$.
- 2.10.** Một cấp số cộng có số hạng thứ 5 bằng 18 và số hạng thứ 12 bằng 32. Tìm số hạng thứ 50 của cấp số cộng này.
- 2.11.** Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 5 và công sai bằng 2. Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để có tổng bằng 2 700?
- 2.12.** Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá trị còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.
- 2.13.** Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?
- 2.14.** Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.