

CHƯƠNG V

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Chương này trình bày khái niệm giới hạn của dãy số, của hàm số và một số định lý, quy tắc tìm giới hạn. Chúng là cơ sở cho việc nghiên cứu các nội dung khác của Giải tích và cho phép giải quyết nhiều bài toán của khoa học và thực tiễn. Khái niệm hàm số liên tục và một vài tính chất đơn giản của chúng được trình bày ở phần cuối chương.



Bài 15

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

THUẬT NGỮ

- Giới hạn của dãy số
- Các phép toán giới hạn
- Cấp số nhân lùi vô hạn
- Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm giới hạn của dãy số.
- Giải thích một số giới hạn cơ bản.
- Vận dụng các phép toán giới hạn để tìm giới hạn của một số dãy số đơn giản.
- Tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và vận dụng được kết quả đó để giải quyết một số tình huống thực tiễn giả định hoặc liên quan đến thực tiễn.

Nghịch lý Zeno. Achilles (A-sin, một nhân vật trong thần thoại Hy Lạp, được mô tả là có thể chạy nhanh như gió) đuổi theo một con rùa trên một đường thẳng. Vị trí xuất phát của Achilles là A_1 , cách vị trí xuất phát R_1 của rùa một quãng đường có chiều dài là a (H.5.1). Zeno lý luận rằng, mặc dù chạy nhanh hơn nhưng Achilles không bao giờ đuổi kịp rùa.



Hình 5.1

Thật vậy, trước tiên Achilles phải đến được vị trí $A_2 = R_1$ và trong khoảng thời gian này, rùa đã di chuyển đến vị trí R_2 . Sau đó, Achilles phải đến được vị trí $A_3 = R_2$, lúc này rùa đã di chuyển đến vị trí $R_3, \dots$. Cứ như vậy, Achilles không bao giờ đuổi kịp rùa.

Zeno (490 – 429 trước Công nguyên) là một triết gia Hy Lạp, đến từ thành phố Elea (miền nam nước Ý ngày nay). Trong số các nghịch lý của Zeno, nghịch lý Achilles đuổi rùa được coi là đã thúc đẩy sự hình thành khái niệm giới hạn, một công cụ thiết yếu của toán học, được sử dụng để nghiên cứu các quá trình liên quan đến sự vô hạn.

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

» H01. Nhận biết dãy số có giới hạn là 0

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

- Biểu diễn năm số hạng đầu của dãy số này trên trục số.
- Bắt đầu từ số hạng nào của dãy, khoảng cách từ u_n đến 0 nhỏ hơn 0,01?

Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn là 0** khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

» Ví dụ 1. Xét dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n^2}$. Giải thích vì sao dãy số này có giới hạn là 0.

Giải

Dãy số này có giới hạn là 0, bởi vì $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý khi n đủ lớn.

Chẳng hạn, để $|u_n| < 0,0001$ tức là $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{10\,000}$, ta cần $n^2 > 10\,000$ hay $n > 100$. Như vậy, các số hạng của dãy kể từ số hạng thứ 101 đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 0,0001.

Chú ý. Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0, ta có các kết quả sau:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k là một số nguyên dương;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;
- Nếu $|u_n| \leq v_n$ với mọi $n \geq 1$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

» Luyện tập 1. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} = 0$.

» H02. Nhận biết dãy số có giới hạn hữu hạn

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$. Xét dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - 1$.

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn là số thực a** khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

» **Ví dụ 2.** Xét dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n}$. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Giải

$$\text{Ta có } u_n - 2 = \frac{2n+1}{n} - 2 = \frac{(2n+1) - 2n}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Do vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Chú ý. Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ khi và chỉ khi
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$.



» **Luyện tập 2.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3 \cdot 2^n - 1}{2^n}$. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

» **Vận dụng 1.** Một quả bóng cao su được thả từ độ cao 5 m xuống một mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trình này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử u_n là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ n . Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0.

2. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

» **HĐ3.** Hình thành quy tắc tính giới hạn

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = 2 + \frac{1}{n}$, $v_n = 3 - \frac{2}{n}$.

Tính và so sánh: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Tổng quát, ta có các quy tắc tính giới hạn sau đây:

a) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$ thì

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = a + b;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = a - b;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \text{ (nếu } b \neq 0 \text{)}.$$

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì

$$a \geq 0 \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}.$$

» **Ví dụ 3.** Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 - 1}$.

Giải

Áp dụng các quy tắc tính giới hạn, ta được

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Để tính giới hạn của dãy số dạng phân thức, ta chia cả tử thức và mẫu thức cho lũy thừa cao nhất của n , rồi áp dụng các quy tắc tính giới hạn.

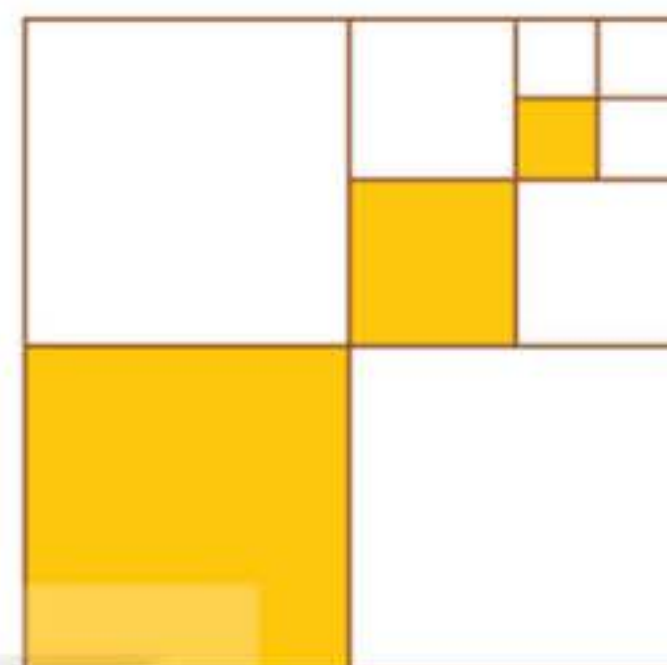


» **Luyện tập 3.** Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{n + 1}$.

3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

» **HĐ4.** Làm quen với việc tính tổng vô hạn

Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái (H.5.2). Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.



Hình 5.2

a) Tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

b) Tìm $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với công bội q . Khi đó

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Vì $|q| < 1$ nên $q^n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Do đó, ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{u_1}{1 - q} - \left(\frac{u_1}{1 - q} \right) q^n \right] = \frac{u_1}{1 - q}.$$

Giới hạn này được gọi là **tổng của cấp số nhân lùi vô hạn** (u_n) , và kí hiệu là

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Như vậy

$$S = \frac{u_1}{1 - q} \quad (|q| < 1).$$

» **Ví dụ 4.** Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$

Giải

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$.

Do đó

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

» **Ví dụ 5.** Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,222... dưới dạng phân số.

Giải

Ta có $2,222... = 2 + 0,2 + 0,02 + 0,002 + ... = 2 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10^2} + 2 \cdot \frac{1}{10^3} + ...$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 2$, $q = \frac{1}{10}$ nên

$$2,222... = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{10}} = \frac{20}{9}.$$

» **Luyện tập 4.** Tính tổng $S = 2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{7^2} + ... + \frac{2}{7^{n-1}} + ...$

» **Vận dụng 2.** (Giải thích nghịch lí Zeno)

Để đơn giản, ta giả sử Achilles chạy với vận tốc 100 km/h, vận tốc của rùa là 1 km/h và khoảng cách ban đầu $a = 100$ km.

- Tính thời gian $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ tương ứng để Achilles đi từ A_1 đến A_2 , từ A_2 đến $A_3, ...,$ từ A_n đến $A_{n+1}, ...$
- Tính tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_{n+1}, ...$, tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa.
- Sai lầm trong lập luận của Zeno là ở đâu?

4. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ

» **HĐ5.** Nhận biết giới hạn vô cực

Một loại vi khuẩn được nuôi cấy với số lượng ban đầu là 50. Sau mỗi chu kì 4 giờ, số lượng của chúng sẽ tăng gấp đôi.

- Dự đoán công thức tính số vi khuẩn u_n sau chu kì thứ n .
- Sau bao lâu, số lượng vi khuẩn sẽ vượt con số 10 000?

- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.
- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Theo định nghĩa trên, ta có:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$, với k là số nguyên dương;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

Liên quan đến giới hạn vô cực của dãy số, ta có một số quy tắc sau đây:

- Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (hoặc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$.

» **Ví dụ 6.** Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2n)$.

Giải

Ta có $n^2 - 2n = n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$. Hơn nữa $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1$.

Do đó, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2n) = +\infty$.

» **Luyện tập 5.** Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n})$.

BÀI TẬP

5.1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$.

5.2. Cho hai dãy số không âm (u_n) và (v_n) với $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$.

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2}{v_n - u_n}$;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n + 2v_n}$.

5.3. Tìm giới hạn của các dãy số cho bởi:

a) $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n - 1}$;

b) $v_n = \sqrt{2n^2 + 1} - n$.

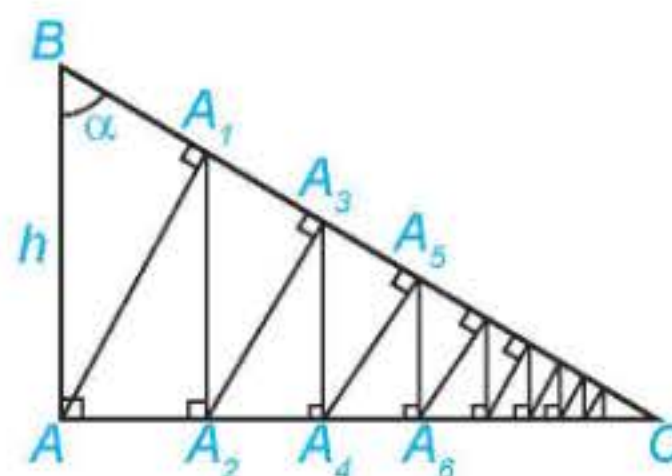
5.4. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số:

a) $1,(12) = 1,121212\dots$;

b) $3,(102) = 3,102102102\dots$

5.5. Một bệnh nhân hằng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

5.6. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = h$ và góc B bằng α (H.5.3). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α .



Hình 5.3

Em có biết?

Dãy số Fibonacci và tỉ lệ vàng

Ta đã biết dãy Fibonacci cho bởi hệ thức truy hồi:

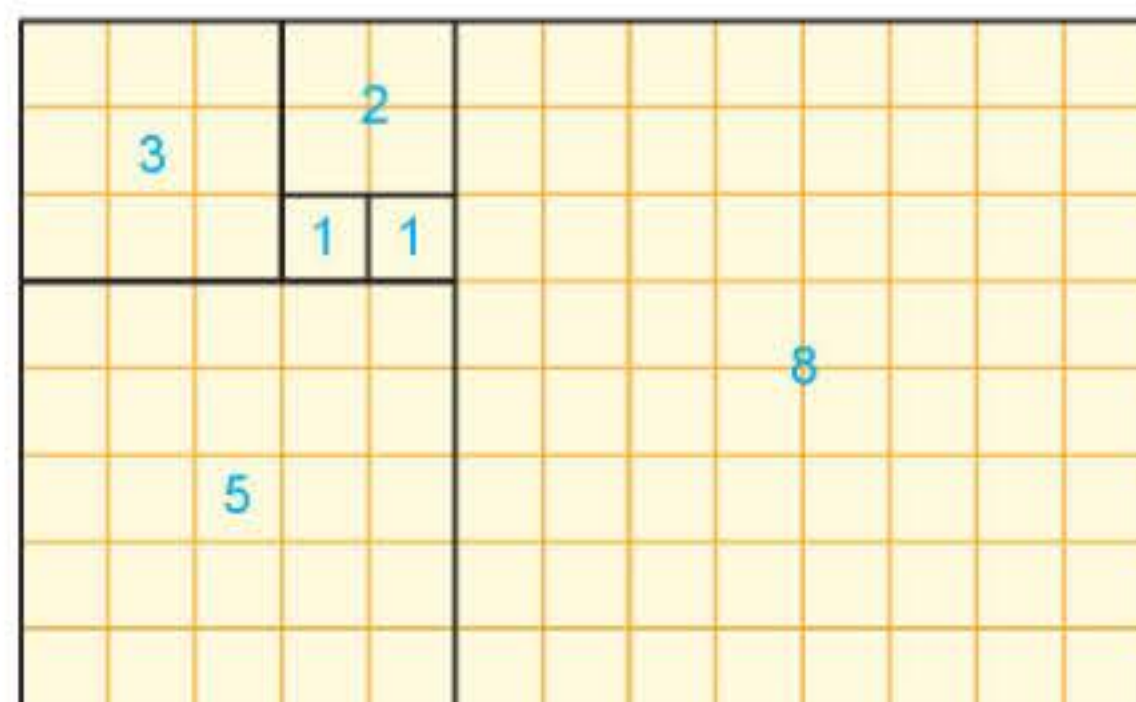
$$u_1 = u_2 = 1,$$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}^{(*)} \text{ với } n > 2.$$

Chia cả hai vế của $(*)$ cho u_{n-1} và đặt

$$v_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}, \text{ ta có công thức}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{v_{n-1}}.$$



Dãy (v_n) có giới hạn là một số dương r thỏa mãn phương trình $r = 1 + \frac{1}{r}$, hay tương

đương $r^2 - r - 1 = 0$. Giải phương trình này ta được $r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Đây chính là *tỉ lệ vàng* (golden ratio) được sử dụng trong kiến trúc, hội họa, tôn giáo, ... Dãy Fibonacci và tỉ lệ vàng cũng xuất hiện nhiều trong thế giới tự nhiên.

Dãy số logistic

Trong sinh thái học, người ta sử dụng dãy (p_n) cho bởi công thức truy hồi $p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$ để mô phỏng hệ sinh thái của một loài (động vật hoặc thực vật), trong đó p_n là tỉ lệ giữa số lượng cá thể theo thời gian và sức chứa của môi trường, k là hệ số phụ thuộc đặc điểm của loài và điều kiện môi trường. Dãy số này được gọi là dãy logistic, do nhà sinh học Robert May đưa ra năm 1976. Tùy thuộc hệ số k và giá trị ban đầu p_0 , ta có thể dự đoán sự thay đổi của hệ trong tương lai. Đặc biệt, trong trường hợp dãy (p_n) có giới hạn là một số dương, ta nói hệ sinh thái của loài là ổn định.

(Theo Stewart, Calculus, Nhà xuất bản Cengage Learning)