

THUẬT NGỮ

- Giới hạn của hàm số
- Giới hạn một phía
- Giới hạn tại vô cực
- Giới hạn vô cực

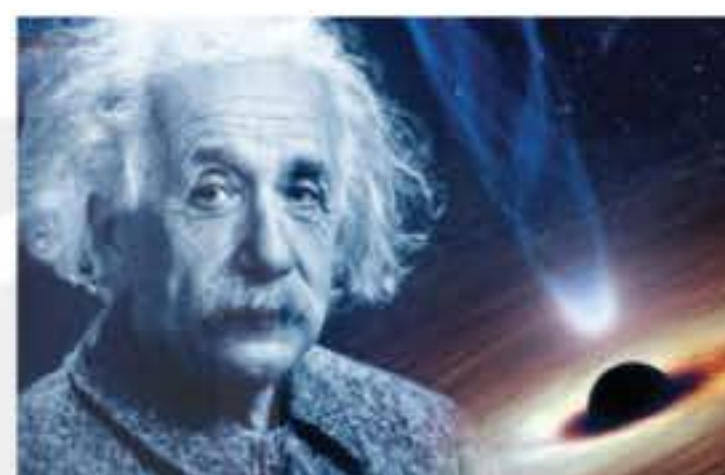
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm và tại vô cực.
- Nhận biết khái niệm giới hạn một phía.
- Nhận biết khái niệm giới hạn vô cực.
- Tính một số dạng giới hạn của hàm số.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với giới hạn của hàm số.

Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?



Albert Einstein (1879 – 1955)

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

» **H01.** Nhận biết khái niệm giới hạn tại một điểm

Cho hàm số $f(x) = \frac{4 - x^2}{x - 2}$.

- Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.
- Cho dãy số $x_n = 2 + \frac{1}{n}$. Rút gọn $f(x_n)$ và tính giới hạn của dãy (u_n) với $u_n = f(x_n)$.
- Với dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 2$ và $x_n \rightarrow 2$, tính $f(x_n)$ và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$.

Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, có thể trừ điểm x_0 . Ta nói hàm số $f(x)$ có **giới hạn** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a; b)$, $x_n \neq x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

» **Ví dụ 1.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$. Chứng tỏ rằng $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

Giải

Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 1$ và $x_n \rightarrow 1$. Ta có $f(x_n) = \frac{x_n - 1}{x_n^2 - 1} = \frac{1}{x_n + 1}$.

Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n + 1} = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

Tương tự đối với dãy số, ta có các quy tắc tính giới hạn của hàm số tại một điểm như sau:

a) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ nếu } M \neq 0.$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ với c là hằng số.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ với $n \in \mathbb{N}$.



» **Ví dụ 2.** Cho $f(x) = x - 1$ và $g(x) = x^3$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x) - g(x)];$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2}{g(x)}.$

Giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 - 1 = 0$. Mặt khác, ta thấy $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$.

a) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)] - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \cdot 0 - 1 = -1.$$

b) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]^2}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

» **Ví dụ 3.** Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$.

Giải

Do mẫu thức có giới hạn là 0 khi $x \rightarrow 0$ nên ta không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương hai hàm số.

Chú ý rằng $\frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} = \frac{(\sqrt{x+9})^2 - 3^2}{x(\sqrt{x+9} + 3)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+9} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3}.$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{x+9} + 3]} = \frac{1}{6}.$$

» **Luyện tập 1.** Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

» **HĐ2.** Nhận biết khái niệm giới hạn một bên

Cho hàm số $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$.

a) Cho $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ và $x'_n = 1 + \frac{1}{n}$. Tính $y_n = f(x_n)$ và $y'_n = f(x'_n)$.

b) Tìm giới hạn của các dãy số (y_n) và (y'_n) .

c) Cho các dãy số (x_n) và (x'_n) bất kì sao cho $x_n < 1 < x'_n$ và $x_n \rightarrow 1$, $x'_n \rightarrow 1$, tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n)$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói số L là **giới hạn bên phải** của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói số L là **giới hạn bên trái** của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

» **Ví dụ 4.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ x+1 & \text{nếu } 1 \leq x < 2. \end{cases}$

Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Giải

Với dãy số (x_n) bất kì sao cho $0 < x_n < 1$ và $x_n \rightarrow 1$, ta có $f(x_n) = x_n^2$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1$.

Tương tự, với dãy số (x_n) bất kì mà $1 < x_n < 2$, $x_n \rightarrow 1$, ta có $f(x_n) = x_n + 1$, cho nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 2$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi
 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.



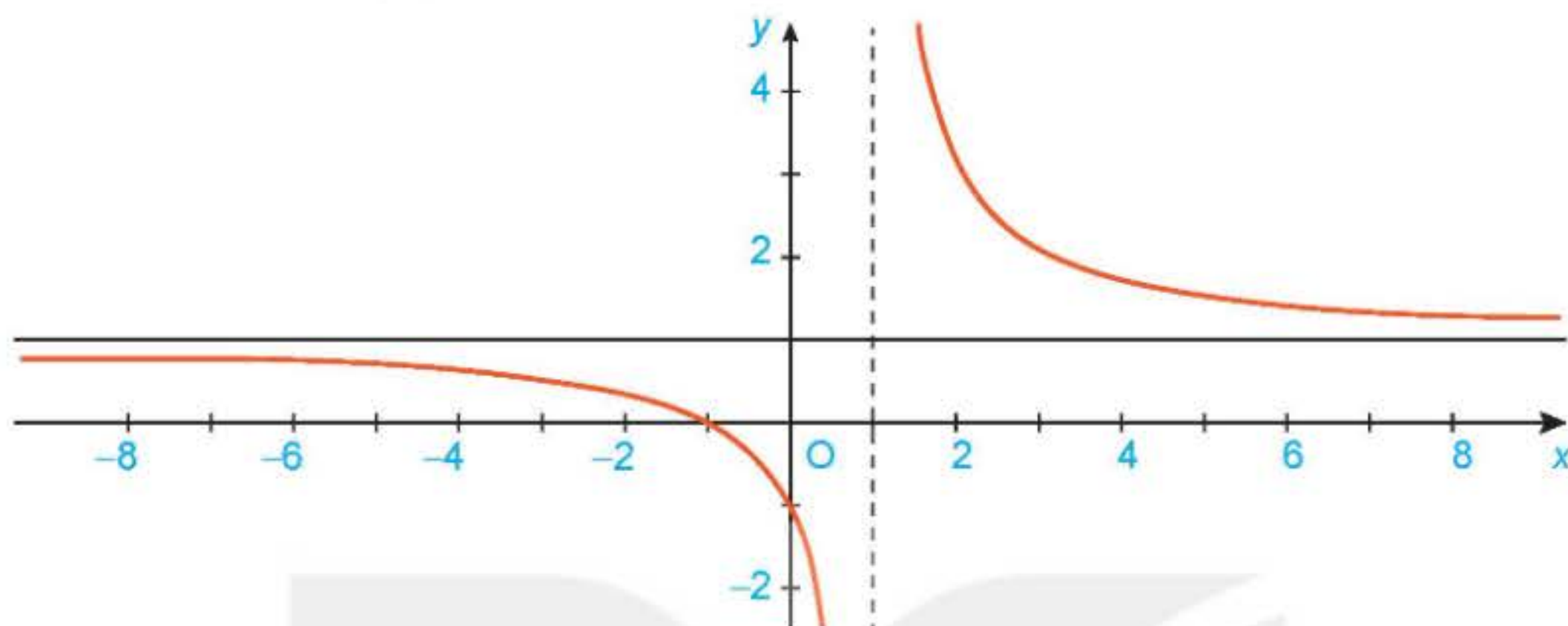
» **Luyện tập 2.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x & \text{nếu } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$

Tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

» HỒI 3. Nhận biết khái niệm giới hạn tại vô cực

Cho hàm số $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$ có đồ thị như Hình 5.4.



Hình 5.4

Giả sử (x_n) là dãy số sao cho $x_n > 1$, $x_n \rightarrow +\infty$. Tính $f(x_n)$ và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < b$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

» Ví dụ 5. Cho $f(x) = 2 + \frac{4}{x-1}$. Sử dụng định nghĩa, tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Giải

Lấy dãy (x_n) bất kì sao cho $x_n > 1$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) = 2 + \frac{4}{x_n-1}$. Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 2$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tương tự, ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

- Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn tại một điểm cũng đúng cho giới hạn hữu hạn tại vô cực.
- Với c là hằng số, ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$.
- Với k là một số nguyên dương, ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

» **Ví dụ 6.** Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \right) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= -\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = -\sqrt{1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} = -1. \end{aligned}$$

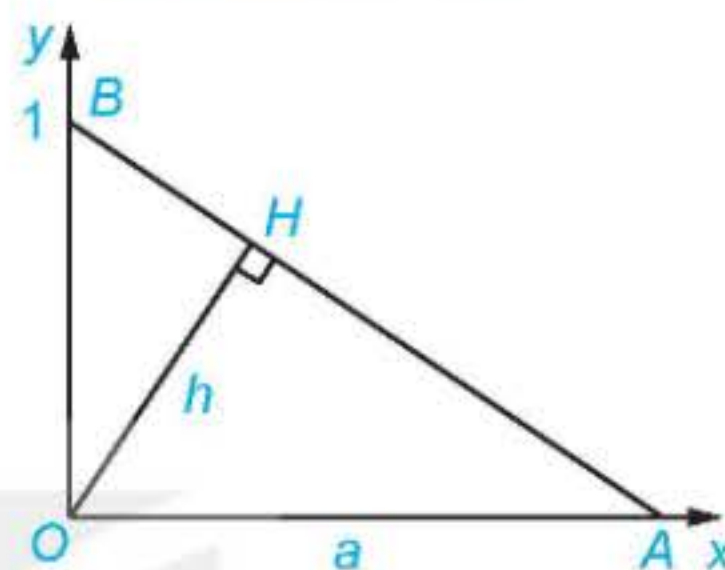
$$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b} & a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2 b} & a < 0. \end{cases}$$



» **Luyện tập 3.** Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x + 1}$.

» **Vận dụng.** Cho tam giác vuông OAB với $A = (a; 0)$ và $B = (0; 1)$ như Hình 5.5. Đường cao OH có độ dài là h .

- Tính h theo a .
- Khi điểm A dịch chuyển về O , điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?
- Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox , điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?



Hình 5.5

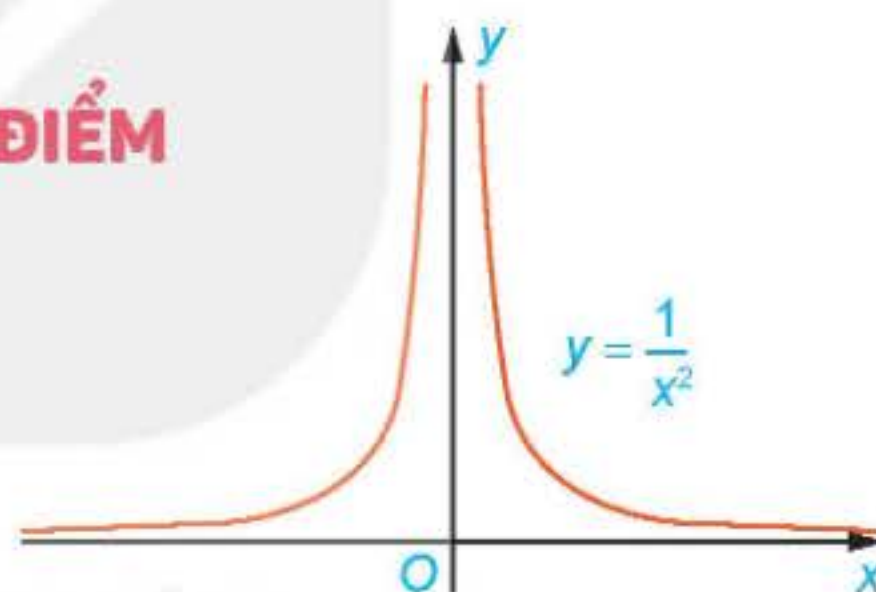
3. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

a) Giới hạn vô cực

» **HĐ 4.** Nhận biết khái niệm giới hạn vô cực

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$ có đồ thị như Hình 5.6.

Cho $x_n = \frac{1}{n}$, chứng tỏ rằng $f(x_n) \rightarrow +\infty$.



Hình 5.6

Giả sử khoảng $(a; b)$ chứa x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a; b) \setminus \{x_0\}$, $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi $x \rightarrow x_0$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} [-f(x)] = +\infty$.

» **Ví dụ 7.** Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|}$.

Giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{|x - 1|}$. Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 1$, $x_n \rightarrow 1$. Khi đó, $|x_n - 1| \rightarrow 0$.

Do đó $f(x_n) = \frac{1}{|x_n - 1|} \rightarrow +\infty$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|} = +\infty$.

» **HĐ5.** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Với các dãy số (x_n) và (x'_n) cho bởi $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $x'_n = 1 - \frac{1}{n}$, tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n)$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0 < x_n < b$, $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về bên trái nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $a < x_n < x_0$, $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.
- Các giới hạn một bên $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

» **Ví dụ 8.** Giải bài toán ở tình huống mở đầu.

Giải

Từ công thức khối lượng

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ta thấy m là một hàm số của v , với tập xác định là nửa khoảng $[0; c)$. Rõ ràng khi v tiến

gần tới vận tốc ánh sáng, tức là $v \rightarrow c^-$, ta có $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 0$. Do đó $\lim_{v \rightarrow c^-} m(v) = +\infty$, nghĩa là khối lượng m của vật trở nên vô cùng lớn khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng.

» **Luyện tập 4.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{|x|}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

Chú ý. Các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự như giới hạn của hàm số $f(x)$ tại vô cực. Chẳng hạn: Ta nói hàm số $y = f(x)$, xác định trên khoảng $(a; +\infty)$, có giới hạn là $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Một số giới hạn đặc biệt:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k là số nguyên dương chẵn;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k là số nguyên dương lẻ.

b) Một số quy tắc tính giới hạn vô cực

Chú ý các quy tắc tính giới hạn hữu hạn không còn đúng cho giới hạn vô cực.

Ta có một số quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số đó có giới hạn vô cực.

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x)g(x)$.

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$). Khi đó $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$.

» **Ví dụ 9.** Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2}$.

Giải

Ta sử dụng quy tắc tìm giới hạn của thương. Rõ ràng, giới hạn của tử số $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$.

Ngoài ra, mẫu số nhận giá trị dương với mọi $x \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Do vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2} = +\infty$.

» **Ví dụ 10.** Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x(1-x)}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x(1-x)}$.

Giải

Viết $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x}$, ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 > 0$. Hơn nữa $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ do $1-x < 0$ khi $x > 1$.

Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của tích, ta được $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x(1-x)} = -\infty$.

Lí luận tương tự, ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x(1-x)} = +\infty$.

» **Luyện tập 5.** Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2}$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2}$.

BÀI TẬP

5.7. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ và $g(x) = x+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- a) $f(x) = g(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

5.8. Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x^2}$.

5.9. Cho hàm số $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc

chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$).

Tính $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$ và $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t)$.

5.10. Tính các giới hạn một bên:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2-x+1}{4-x}$.

5.11. Cho hàm số $g(x) = \frac{x^2-5x+6}{|x-2|}$.

Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$.

5.12. Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+2} - x)$.

5.13. Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{(x-1)(x-2)}$.

Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.