

THUẬT NGỮ

- Hàm số liên tục tại một điểm
- Hàm số gián đoạn
- Hàm số liên tục trên một khoảng
- Hàm số liên tục trên một đoạn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận dạng hàm số liên tục tại một điểm, hoặc trên một khoảng, trên một đoạn.
- Nhận dạng tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục.
- Nhận biết tính liên tục của một số hàm sơ cấp cơ bản trên tập xác định của chúng.

Một người lái xe từ địa điểm A đến địa điểm B trong thời gian 3 giờ. Biết quãng đường từ A đến B dài 180 km. Chứng tỏ rằng có ít nhất một thời điểm trên hành trình, xe chạy với vận tốc 60 km/h.



1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

» **H01.** Nhận biết tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ và so sánh giá trị này với $f(1)$.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 . Hàm số $f(x)$ được gọi là **liên tục tại điểm** x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm đó.

» **Ví dụ 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$.
Giải

Rõ ràng hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, do đó $x_0 = 2$ thuộc tập xác định của hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-1} = 3 = f(2)$. Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

» **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của hàm dấu $s(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Giải

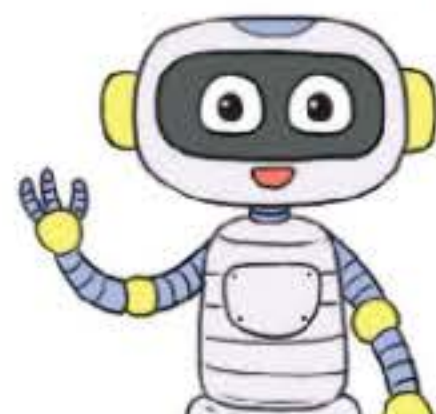
Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 0^+} s(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} s(x) = -1$. Do đó không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} s(x)$.

Vậy hàm số này gián đoạn tại 0.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

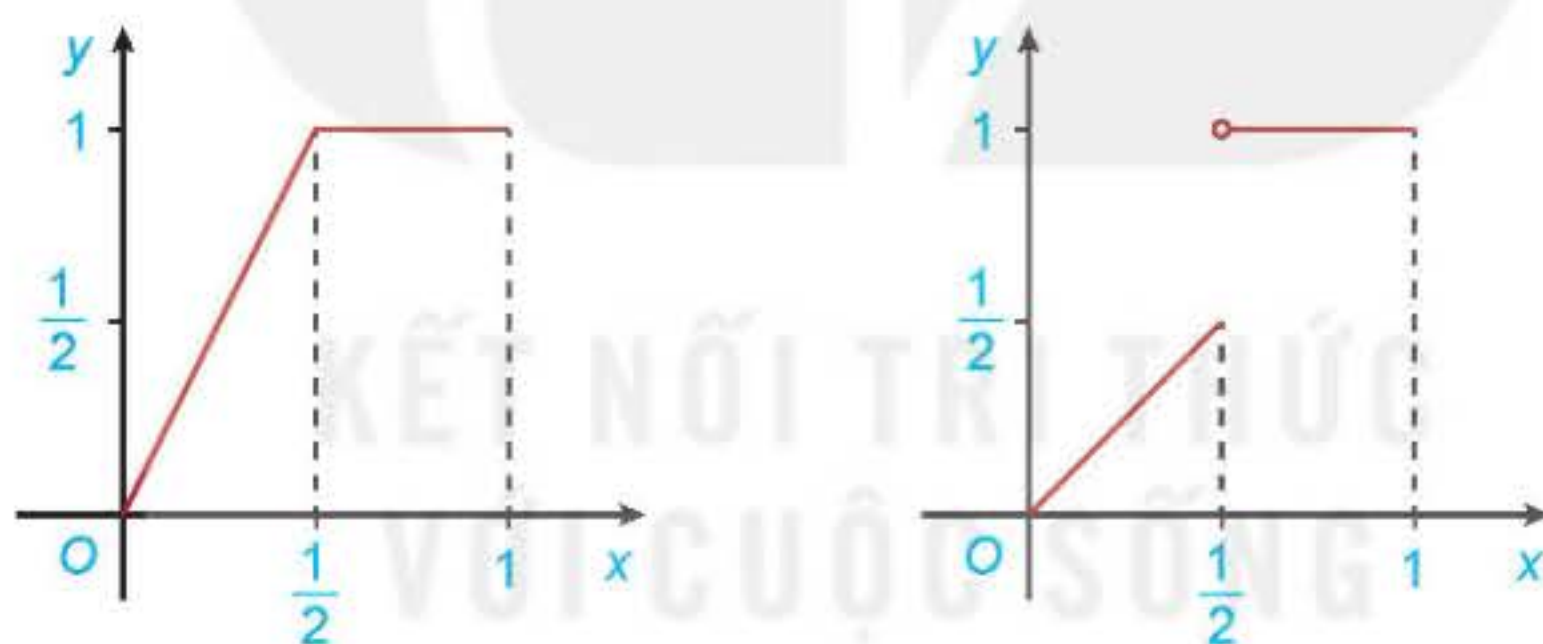
» **Luyện tập 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} -x & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ x^2 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.



2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

» **HĐ2.** Cho hai hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{nếu } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{nếu } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$

với đồ thị tương ứng như Hình 5.7.



Hàm số $y = f(x)$

Hàm số $y = g(x)$

Hình 5.7

Xét tính liên tục của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ tại điểm $x = \frac{1}{2}$ và nhận xét về sự khác nhau giữa hai đồ thị.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên khoảng** $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Các khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng như $(a; b]$, $[a; +\infty)$,... được định nghĩa theo cách tương tự. Có thể thấy đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liên tục trên khoảng đó.

» **Ví dụ 3.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{nếu } x \in (0; 1) \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ trên nửa khoảng $(0; 1]$.

Giải

Ta có $f(x) = x-1$ với $x \in (0; 1)$. Với $x_0 \in (0; 1)$ bất kì, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-1) = x_0 - 1 = f(x_0)$.
 Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; 1)$.

Hơn nữa, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(1)$ nên $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $(0; 1]$.

Về tính liên tục của các hàm số sơ cấp cơ bản đã biết, ta có

- Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng.

» **Ví dụ 4.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Tìm các khoảng trên đó hàm số $f(x)$ liên tục.

Giải

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

» **Luyện tập 2.** Tìm các khoảng trên đó hàm số $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$ liên tục.

3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

» **HĐ3.** Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = -x+1$.

a) Xét tính liên tục của hai hàm số trên tại điểm $x = 1$.

b) Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$ và so sánh L với $f(1) + g(1)$.

Ta có khẳng định sau đây về tổng, hiệu, tích và thương của hai hàm số liên tục.

Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 ;
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

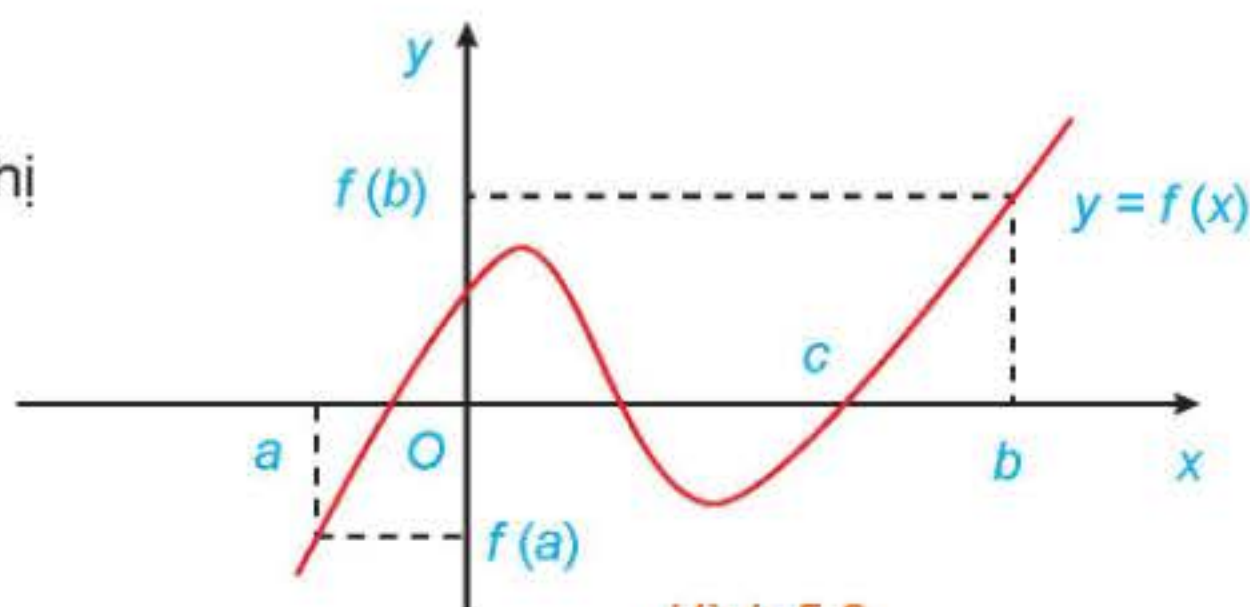
» **Ví dụ 5.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x-1}$.

Giải

Hàm số xác định trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Trên các khoảng này, tử thức (hàm lượng giác) và mẫu thức (hàm đa thức) là các hàm số liên tục. Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Nhận xét. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Kết quả này được minh hoạ bằng đồ thị như Hình 5.8.



Hình 5.8

» **Ví dụ 6.** Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x^3 - 10 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x^3 - 10$. Ta có $f(0) = -10 < 0$, $f(2) = 30 > 0$ và vì $f(x)$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $[0; 2]$. Khi đó, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

» **Vận dụng.** Giải bài toán ở tình huống mở đầu.

BÀI TẬP

5.14. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x = 1$. Biết $f(1) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) - g(x)] = 3$. Tính $g(1)$.

5.15. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}$; b) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 4 - x & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$

5.16. Tìm giá trị của tham số m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x + m & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

5.17. Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5 km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km	Giá cước từ km thứ 31
10 000 đồng	13 500 đồng	11 000 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.