

A – TRẮC NGHIỆM

5.18. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n}$. Mệnh đề đúng là

- A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
 B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
 C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

5.19. Cho $u_n = \frac{2 + 2^2 + \dots + 2^n}{2^n}$. Giới hạn của dãy số (u_n) bằng

- A. 1. B. 2. C. -1. D. 0.

5.20. Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_n = \frac{2}{3^n}$. Tổng của cấp số nhân này bằng

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 6.

5.21. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$. Mệnh đề đúng là

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
 B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.
 D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

5.22. Cho hàm số $f(x) = \frac{x - x^2}{|x|}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ bằng

- A. 0. B. 1. C. $+\infty$. D. -1.

5.23. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên

- A. $(-\infty; +\infty)$.
 B. $(-\infty; -1]$.
 C. $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
 D. $[-1; +\infty)$.

5.24. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi

- A. $a = 0$. B. $a = 3$. C. $a = -1$. D. $a = 1$.

B – TỰ LUẬN

5.25. Cho dãy số (u_n) có tính chất $|u_n - 1| < \frac{2}{n}$. Có kết luận gì về giới hạn của dãy số này?

5.26. Tìm giới hạn của các dãy số có số hạng tổng quát cho bởi công thức sau:

a) $u_n = \frac{n^2}{3n^2 + 7n - 2}$; b) $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k + 5^k}{6^k}$; c) $w_n = \frac{\sin n}{4n}$.

5.27. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số:

a) $1,(01)$; b) $5,(132)$.

5.28. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(1-x)^2}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

5.29. Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

5.30. Chứng minh rằng giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ không tồn tại.

5.31. Giải thích tại sao các hàm số sau đây gián đoạn tại điểm đã cho.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$;

b) $g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{nếu } x < 1 \\ 2-x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

5.32. Lực hấp dẫn tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm Trái Đất là

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{nếu } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{nếu } r \geq R, \end{cases}$$

trong đó M và R lần lượt là khối lượng và bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Xét tính liên tục của hàm số $F(r)$.

5.33. Tìm tập xác định của các hàm số sau và giải thích tại sao các hàm này liên tục trên các khoảng xác định của chúng.

a) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 5x + 6}$; b) $g(x) = \frac{x-2}{\sin x}$.

5.34. Tìm các giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \leq a \\ x^2 & \text{nếu } x > a \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.