

CHƯƠNG VI HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

$$a = 1$$

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

$$\log_a M + \log_a N = \log_a(MN)$$

$$\log_a M - \log_a N = \log_a\left(\frac{M}{N}\right)$$

$$\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$$

Log

Trong chương này, lũy thừa với số mũ nguyên được mở rộng cho số mũ hữu tỉ, số mũ thực và từ đó hình thành khái niệm lôgarit. Đây là những phép tính được sử dụng nhiều trong khoa học, kĩ thuật và đời sống. Trên cơ sở đó, hai hàm số quan trọng là hàm số mũ và hàm số lôgarit được giới thiệu. Phần cuối chương trình bày cách giải một số phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit đơn giản.

Bài 18

LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

THUẬT NGỮ

- Cơ số
- Căn bậc n
- Lũy thừa với số mũ nguyên
- Lũy thừa với số mũ hữu tỉ
- Lũy thừa với số mũ thực
- Số mũ

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm lũy thừa với số mũ nguyên của một số thực khác 0; lũy thừa với số mũ hữu tỉ và lũy thừa với số mũ thực của một số thực dương.
- Giải thích các tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên, lũy thừa với số mũ hữu tỉ và lũy thừa với số mũ thực.
- Sử dụng tính chất của phép tính lũy thừa trong tính toán các biểu thức số và rút gọn các biểu thức chứa biến.
- Tính giá trị biểu thức số có chứa phép tính lũy thừa bằng cách sử dụng máy tính cầm tay.
- Giải quyết một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc thực tiễn gắn với phép tính lũy thừa.

Ngân hàng thường tính lãi suất cho khách hàng theo thể thức *lãi kép theo định kì*, tức là nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Nếu một người gửi số tiền P với lãi suất r mỗi kì thì sau N kì, số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) được tính theo công thức *lãi kép* sau:

$$A = P(1+r)^N.$$



Bác Minh gửi tiết kiệm số tiền 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất 6% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) bác Minh thu được sau 3 năm.

1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN

» HỒI 1. Nhận biết lũy thừa với số mũ nguyên

Tính: $(1,5)^2$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; $(\sqrt{2})^4$.

- Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

Với a là số thực tùy ý:

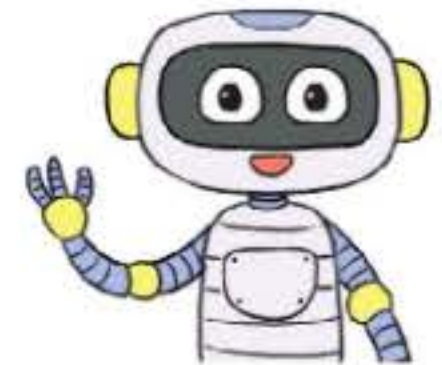
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thừa số}}$$

Với a là số thực khác 0:

$$a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

- Trong biểu thức a^m , a gọi là **cơ số**, m gọi là **số mũ**.

0^0 và 0^{-n} ($n \in \mathbb{N}^*$) không có nghĩa.



Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự như lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Với $a \neq 0, b \neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; & \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}; \\ (a^m)^n &= a^{mn}; & (ab)^m &= a^m b^m; \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m}. \end{aligned}$$

Chú ý

- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

» Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 8^{-2} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2}.$$

Giải

$$A = 2^8 \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{1}{0,2^4} \cdot \frac{1}{25^2} = 2^8 \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{0,2^4 \cdot 5^4} = 2^2 + \frac{1}{(0,2 \cdot 5)^4} = 4 + 1 = 5.$$

» Luyện tập 1. Một số dương x được gọi là viết dưới dạng *kí hiệu khoa học* nếu $x = a \cdot 10^m$, ở đó $1 \leq a < 10$ và m là một số nguyên. Hãy viết các số liệu sau dưới dạng kí hiệu khoa học:

- Khối lượng của Trái Đất khoảng 5 980 000 000 000 000 000 000 kg;
- Khối lượng của hạt proton khoảng 0,000 000 000 000 000 000 000 001 672 62 kg.

(Theo Vật lí 12, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2020)

2. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

» HỌ2. Nhận biết khái niệm căn bậc n

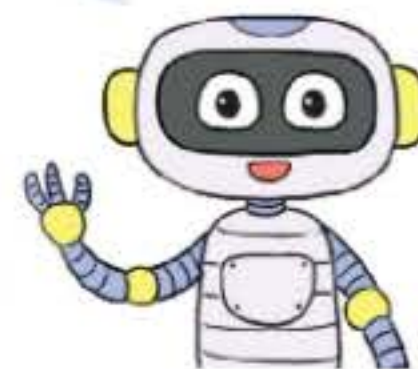
- a) Tìm tất cả các số thực x sao cho $x^2 = 4$.
b) Tìm tất cả các số thực x sao cho $x^3 = -8$.

Cho số thực a và số nguyên dương n . Số b được gọi là **căn bậc n** của số a nếu $b^n = a$.

Nhận xét. Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Căn bậc 1 của số a chính là a .

Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là **căn số học bậc n của a**), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

$$\sqrt[n]{0} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$



? Số âm có căn bậc chẵn không? Vì sao?

» **Ví dụ 2.** Tính: a) $\sqrt[3]{-64}$;

Giải

a) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$.

b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.

b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$.

» **Luyện tập 2.** Tính: a) $\sqrt[3]{-125}$;

b) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$.

» HỌ3. Nhận biết tính chất của căn bậc n

a) Tính và so sánh: $\sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{27}$ và $\sqrt[3]{(-8) \cdot 27}$.

b) Tính và so sánh: $\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}$ và $\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$.

Giả sử n, k là các số nguyên dương, m là số nguyên. Khi đó:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn;} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

(Giả thiết các biểu thức ở trên đều có nghĩa).

» **Ví dụ 3.** Tính: a) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-8}$; b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}$.

Giải

$$\text{a) } \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-8} = \sqrt[5]{4 \cdot (-8)} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2.$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{-3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{-(\sqrt{3})^3} = \sqrt[3]{(-\sqrt{3})^3} = -\sqrt{3}.$$

» **Luyện tập 3.** Tính: a) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{625}$; b) $\sqrt[5]{-25\sqrt{5}}$.

» **HĐ4.** Nhận biết lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho a là một số thực dương.

a) Với n là số nguyên dương, hãy thử định nghĩa $a^{\frac{1}{n}}$ sao cho $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

b) Từ kết quả của câu a, hãy thử định nghĩa $a^{\frac{m}{n}}$, với m là số nguyên và n là số nguyên dương, sao cho $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Lưu ý: $(\sqrt[n]{a})^n = a$.



Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương. **Lũy thừa của a với số mũ r** , kí hiệu là a^r , xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

❓ Vì sao trong định nghĩa lũy thừa với số mũ hữu tỉ lại cần điều kiện cơ số $a > 0$?

Chú ý. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

» **Ví dụ 4.** Tính: a) $16^{\frac{3}{2}}$; b) $8^{\frac{2}{3}}$.

Giải

$$\text{a) } 16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = \sqrt{(4^2)^3} = \sqrt{(4^3)^2} = 4^3 = 64.$$

$$\text{b) } 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = \frac{1}{4}.$$

» **Luyện tập 4.** Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x^{\frac{3}{2}}y + xy^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ ($x, y > 0$).

3. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

a) Khái niệm lũy thừa với số mũ thực

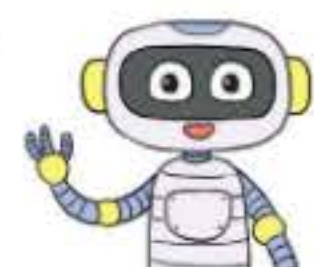
» **HĐ5.** Nhận biết lũy thừa với số mũ thực

Ta biết rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ và $\sqrt{2} = 1,4142135624\dots$

Gọi (r_n) là dãy số hữu tỉ dùng để xấp xỉ số $\sqrt{2}$, với $r_1 = 1$;

$r_2 = 1,4$; $r_3 = 1,41$; $r_4 = 1,4142$;...

$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \sqrt{2}$.



- a) Dùng máy tính cầm tay, hãy tính: 3^{r_1} ; 3^{r_2} ; 3^{r_3} ; 3^{r_4} và $3^{\sqrt{2}}$.
- b) Có nhận xét gì về sai số tuyệt đối giữa $3^{\sqrt{2}}$ và 3^{r_n} , tức là $|3^{\sqrt{2}} - 3^{r_n}|$, khi n càng lớn?

Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó, dãy số (a^{r_n}) có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ (r_n) đã chọn. Giới hạn đó gọi là **lũy thừa của a với số mũ α** , kí hiệu là a^α .

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}.$$

Chú ý. Lũy thừa với số mũ thực (của một số dương) có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

» **Ví dụ 5.** Rút gọn biểu thức: $A = \frac{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1}} \quad (a > 0).$

Giải

$$A = \frac{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1}} = \frac{a^{\sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}}}{a^{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}} = \frac{a^2}{a^{3-1}} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

» **Ví dụ 6.** Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số $8^{\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}}$.

Giải

Ta có: $8^{\sqrt{3}} = (2^3)^{\sqrt{3}} = 2^{3\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}} = (2^2)^{2\sqrt{3}} = 2^{4\sqrt{3}}$.

Vì $3\sqrt{3} < 4\sqrt{3}$ và $2 > 1$ nên $2^{3\sqrt{3}} < 2^{4\sqrt{3}}$. Vậy $8^{\sqrt{3}} < 4^{2\sqrt{3}}$.

Ta đưa về so sánh hai lũy thừa cùng cơ số.



» **Luyện tập 5.** Rút gọn biểu thức: $A = \frac{(a^{\sqrt{2}-1})^{1+\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}} \quad (a > 0).$

» **Vận dụng.** Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

b) Tính lũy thừa với số mũ thực bằng máy tính cầm tay

Có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính căn bậc n và lũy thừa với số mũ thực.

Tính (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư)	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\sqrt{20,15}$	$\sqrt{\square} \ 2 \ 0 \ . \ 1 \ 5 \ =$	4.488875137	$\sqrt{20,15} \approx 4,4889$
$\sqrt[5]{320}$	$\text{SHIFT} \ x^{\square} \ 5 \ \rightarrow \ 3 \ 2 \ 0 \ =$	3.169786385	$\sqrt[5]{320} \approx 3,1698$
$15^{3,2}$	$1 \ 5 \ x^{\square} \ 3 \ . \ 2 \ =$	5800.855256	$15^{3,2} \approx 5\ 800,8553$

BÀI TẬP

6.1. Tính:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; b) $4^{\frac{3}{2}}$; c) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$.

6.2. Thực hiện phép tính:

a) $27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0,75} - 25^{0,5}$; b) $4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}}$.

6.3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^5 y^{-2}}{x^3 y} (x, y \neq 0)$; b) $B = \frac{x^2 y^{-3}}{(x^{-1} y^4)^{-3}} (x, y \neq 0)$.

6.4. Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{y} + y^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}}$; b) $B = \left(\frac{x^{\sqrt{3}}}{y^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}}$.

6.5. Chứng minh rằng: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$.

6.6. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh:

a) $5^{6\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{6}}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$.

6.7. Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^N.$$

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

6.8. Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á khoảng 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).