

THUẬT NGỮ

- Phương trình mũ
- Phương trình lôgarit
- Bất phương trình mũ
- Bất phương trình lôgarit

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Giải phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit ở dạng đơn giản.
- Giải quyết một số vấn đề liên môn hoặc có liên quan đến thực tiễn gắn với phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit.

Giả sử giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng được mô hình hoá bằng công thức:

$$V(t) = 780 \cdot (0,905)^t.$$

Hỏi nếu theo mô hình này, sau bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị của chiếc ô tô đó còn lại không quá 300 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

H01. Nhận biết nghiệm của phương trình mũ

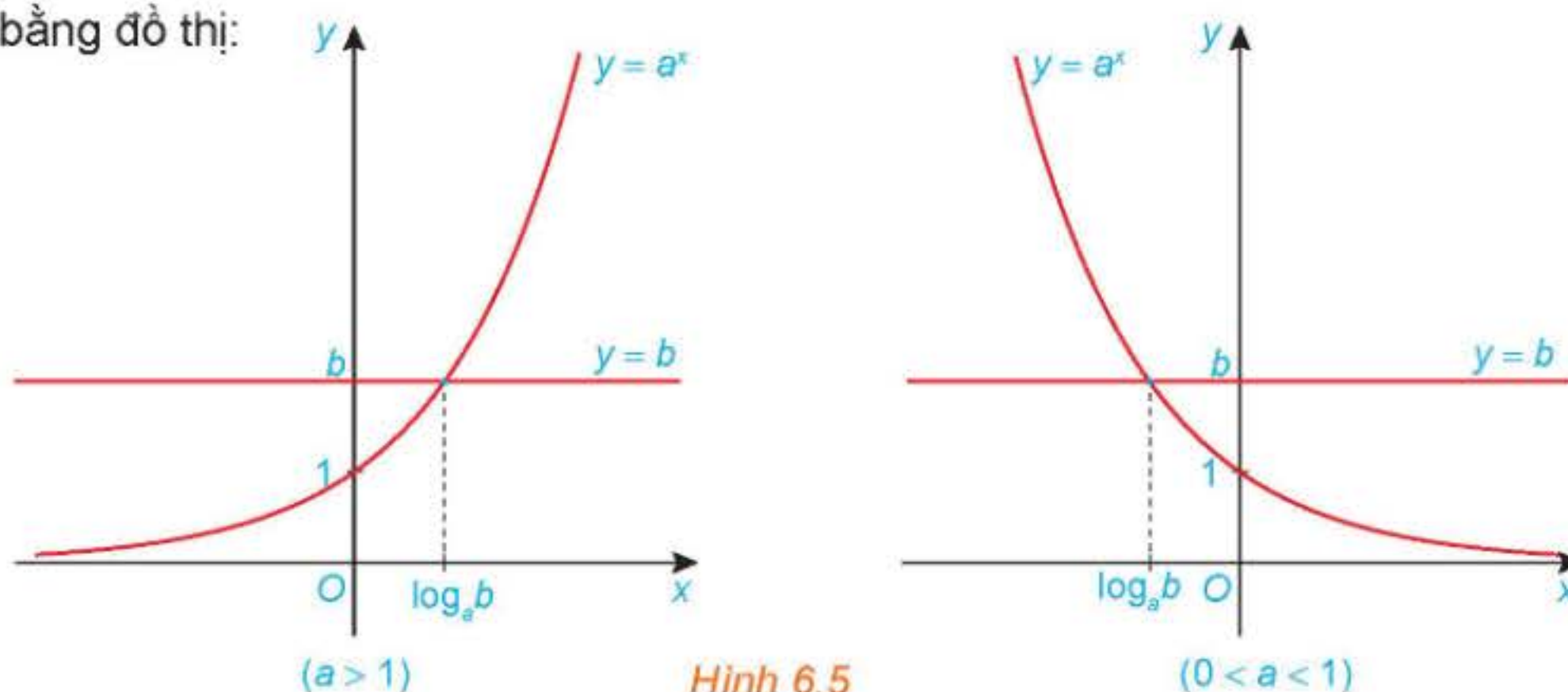
Xét phương trình: $2^{x+1} = \frac{1}{4}$.

- Khi viết $\frac{1}{4}$ thành lũy thừa của 2 thì phương trình trên trở thành phương trình nào?
- So sánh số mũ của 2 ở hai vế của phương trình nhận được ở câu a để tìm x .

Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ (với $0 < a \neq 1$).

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Minh hoạ bằng đồ thị:



Chú ý. Phương pháp giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số:

Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$.

» **Ví dụ 1.** Giải phương trình: $3^{x+1} = \frac{1}{3^{1-2x}}$.

Giải

Đưa về phải về cơ số 3, ta có $\frac{1}{3^{1-2x}} = 3^{2x-1}$.

Từ đó phương trình trở thành $3^{x+1} = 3^{2x-1} \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

» **Ví dụ 2.** Giải phương trình: $10^{x-1} = 2\,022$.

Giải

Lấy lôgarit thập phân hai vế của phương trình ta được $x-1 = \log 2\,022$ hay $x = 1 + \log 2\,022$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1 + \log 2\,022$.

» **Luyện tập 1.** Giải các phương trình sau:

a) $2^{3x-1} = \frac{1}{2^{x+1}}$; b) $2e^{2x} = 5$.

2. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

» **HĐ2.** Nhận biết nghiệm của phương trình lôgarit

Xét phương trình: $2\log_2 x = -3$.

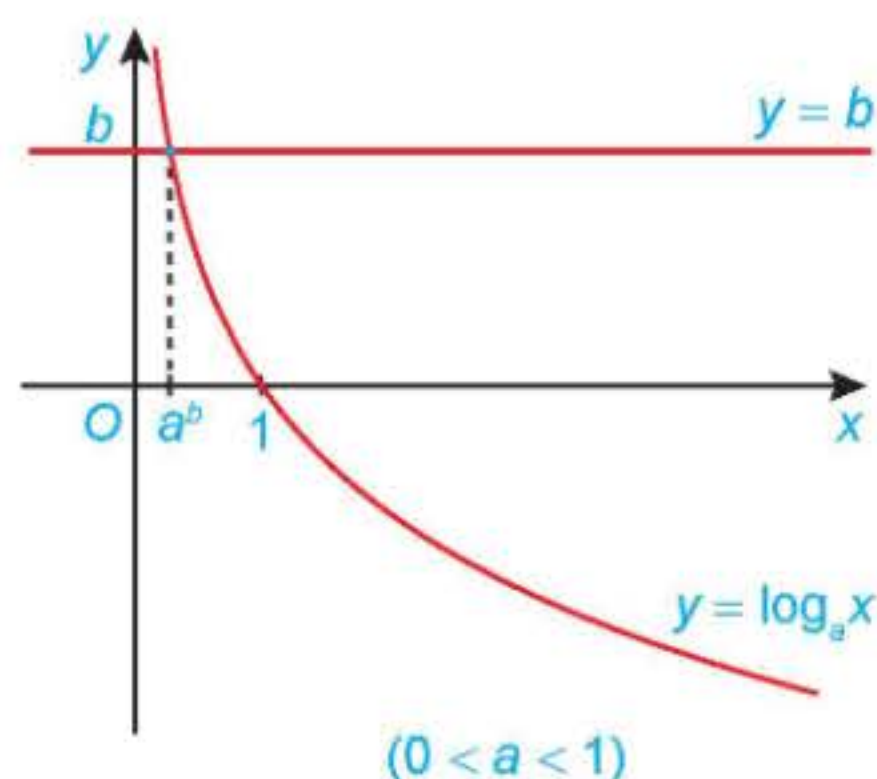
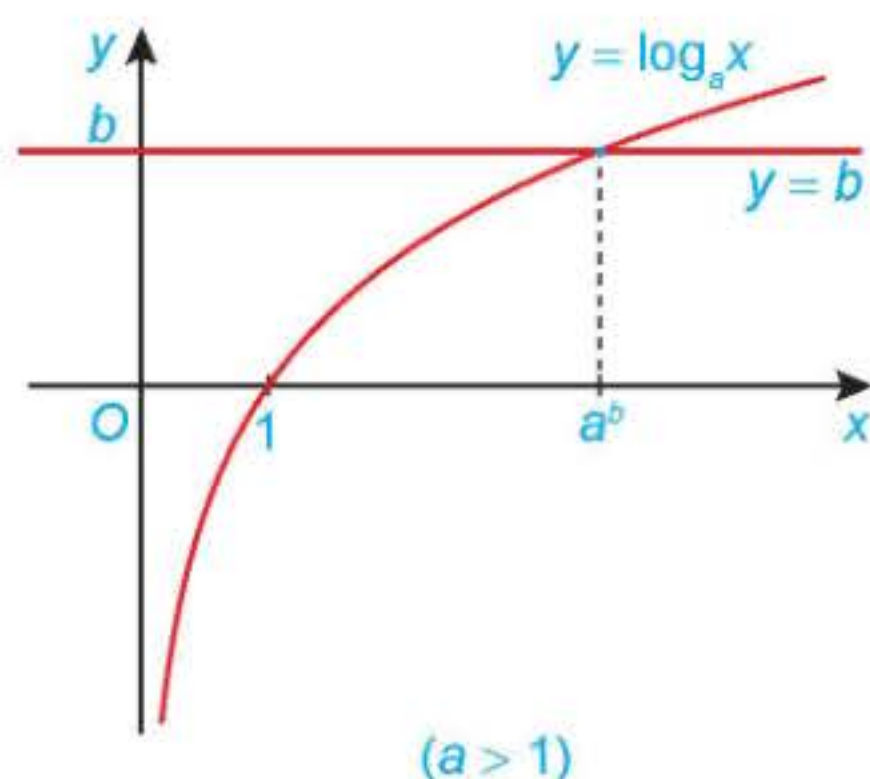
a) Từ phương trình trên, hãy tính $\log_2 x$.

b) Từ kết quả ở câu a và sử dụng định nghĩa lôgarit, hãy tìm x .

Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ ($0 < a \neq 1$).

Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Minh hoạ bằng đồ thị:



Hình 6.6

Chú ý. Phương pháp giải phương trình lôgarit bằng cách đưa về cùng cơ số:

Nếu $u, v > 0$ và $0 < a \neq 1$ thì $\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$.

» **Ví dụ 3.** Giải phương trình: $4 + 3\log(2x) = 16$.

Giải

Điều kiện: $2x > 0$ hay $x > 0$.

Phương trình trở thành $\log(2x) = 4$. Từ đó $2x = 10^4$ hay $x = 5\,000$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 5\,000$.

» **Ví dụ 4.** Giải phương trình: $\log_3(x+1) = \log_3(x^2-1)$.

Giải

Điều kiện: $x+1 > 0$ và $x^2-1 > 0$, tức là $x > 1$.

Phương trình trở thành $x+1 = x^2-1$, hay $x^2-x-2 = 0$.

Từ đó tìm được $x = -1$ và $x = 2$, nhưng chỉ có nghiệm $x = 2$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

» **Luyện tập 2.** Giải các phương trình sau:

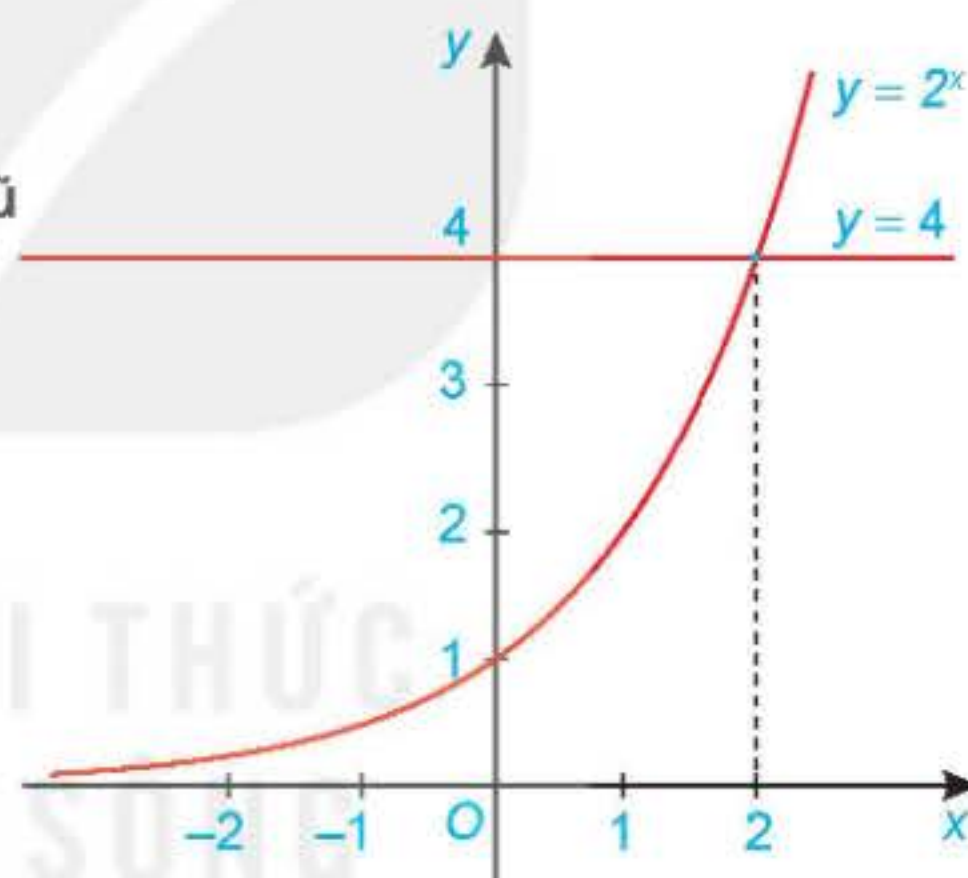
a) $4 - \log(3-x) = 3$;

b) $\log_2(x+2) + \log_2(x-1) = 1$.

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

» **H03.** Nhận biết nghiệm của bất phương trình mũ

Cho đồ thị của các hàm số $y = 2^x$ và $y = 4$ như Hình 6.7. Tìm khoảng giá trị của x mà đồ thị hàm số $y = 2^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 4$ và từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 4$.



Hình 6.7

- **Bất phương trình mũ cơ bản** có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$) với $a > 0$, $a \neq 1$.
- Xét bất phương trình dạng $a^x > b$:
 - Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
 - Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.
Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.
Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Chú ý

a) Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.

b) Nếu $a > 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$.

» **Ví dụ 5.** Giải bất phương trình: $16^x > \frac{1}{8}$.

Giải

$$\text{Ta có: } 16^x > \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^{4x} > 2^{-3} \Leftrightarrow 4x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}.$$

» **Ví dụ 6.** Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Giải

Ta cần tìm t sao cho

$$V(t) \leq 300 \Leftrightarrow 780 \cdot (0,905)^t \leq 300 \Leftrightarrow (0,905)^t \leq \frac{5}{13} \Leftrightarrow t \geq \log_{0,905} \frac{5}{13} \approx 9,6.$$

Vậy sau khoảng 10 năm sử dụng, giá trị của chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng.

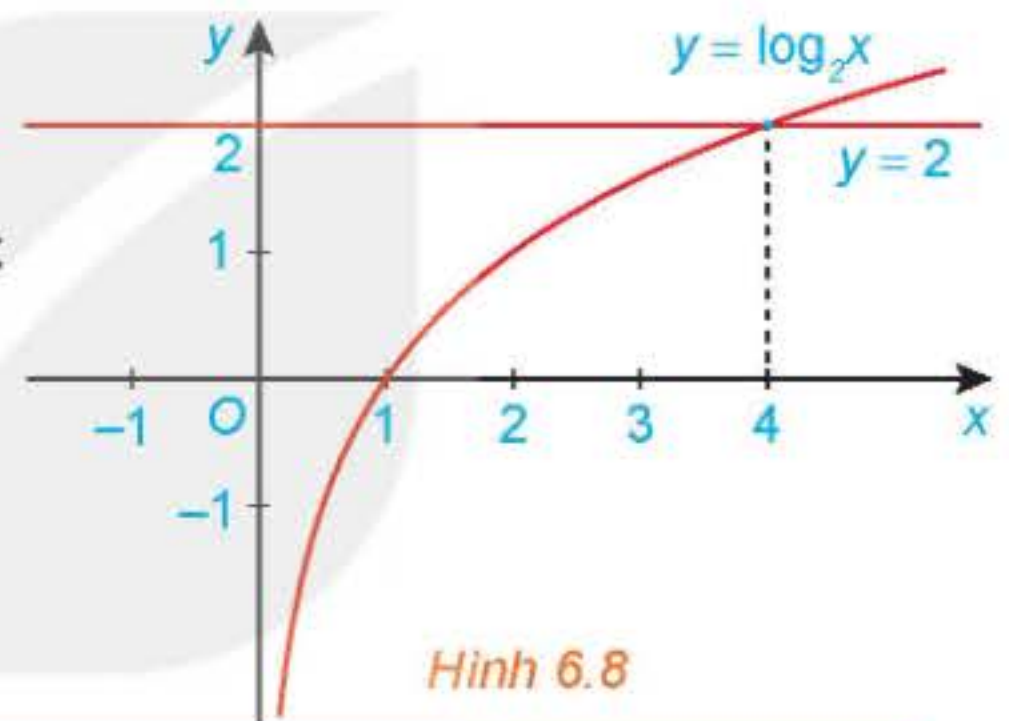
» **Luyện tập 3.** Giải các bất phương trình sau:

a) $0,1^{2x-1} \leq 0,1^{2-x};$ b) $3 \cdot 2^{x+1} \leq 1.$

4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

» **HĐ4.** Nhận biết nghiệm của bất phương trình lôgarit

Cho đồ thị của các hàm số $y = \log_2 x$ và $y = 2$ như Hình 6.8. Tìm khoảng giá trị của x mà đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 2$ và từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x > 2$.



Hình 6.8

- **Bất phương trình lôgarit cơ bản** có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$) với $a > 0$, $a \neq 1$.
- Xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$:
 - Nếu $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
 - Nếu $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

Chú ý

a) Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.

b) Nếu $a > 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v > 0$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v$.

» **Ví dụ 7.** Giải bất phương trình: $\log_{0,3}(x+1) \leq \log_{0,3}(2x-1)$.

Giải

Điều kiện: $x > \frac{1}{2}$.

Vì cơ số $0,3 < 1$ nên bất phương trình trở thành $x+1 \geq 2x-1$, từ đó tìm được $x \leq 2$.

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{2} < x \leq 2$.

► **Luyện tập 4.** Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{7}}(x+1) > \log_7(2-x)$; b) $2\log(2x+1) > 3$.

► **Vận dụng.** Áp suất khí quyển p (tính bằng kilôpascal, viết tắt là kPa) ở độ cao h (so với mực nước biển, tính bằng km) được tính theo công thức sau:

$$\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7}.$$

(Theo *britannica.com*)

- a) Tính áp suất khí quyển ở độ cao 4 km.
b) Ở độ cao trên 10 km thì áp suất khí quyển sẽ như thế nào?

BÀI TẬP

6.20. Giải các phương trình sau:

a) $3^{x-1} = 27$; b) $100^{2x^2-3} = 0,1^{2x^2-18}$;
c) $\sqrt{3}e^{3x} = 1$; d) $5^x = 3^{2x-1}$.

6.21. Giải các phương trình sau:

a) $\log(x+1) = 2$; b) $2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2$;
c) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 4x$; d) $\log_3(x^2 - 3x + 2) = \log_3(2x - 4)$.

6.22. Giải các bất phương trình sau:

a) $0,1^{2-x} > 0,1^{4+2x}$; b) $2 \cdot 5^{2x+1} \leq 3$;
c) $\log_3(x+7) \geq -1$; d) $\log_{0,5}(x+7) \geq \log_{0,5}(2x-1)$.

6.23. Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi 7,5% một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là:

$$A = 500 \cdot (1 + 0,075)^n \text{ (triệu đồng)}.$$

Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

6.24. Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau:

$$N(t) = 500e^{0,4t}.$$

Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80 000 con?

6.25. Giả sử nhiệt độ T (°C) của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T = 25 + 70e^{-0,5t}$, trong đó thời gian t được tính bằng phút.

- a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.
b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 30 °C?

6.26. Tính nồng độ ion hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.