

THUẬT NGỮ

- Khoảng cách
- Chiều cao của hình chóp, hình lăng trụ
- Đường vuông góc chung

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Xác định khoảng cách giữa các đối tượng điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong không gian.
- Xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau trong các trường hợp đơn giản.
- Vận dụng kiến thức về khoảng cách vào một số tình huống thực tế.

Khoảng cách là khái niệm được dùng trong nhiều lĩnh vực của đời sống. Trong bài học này ta tìm hiểu về khoảng cách giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng.

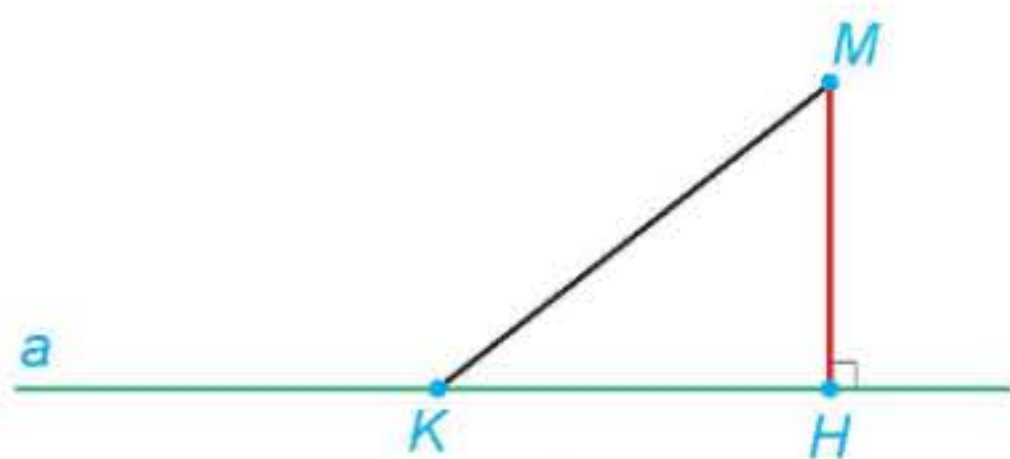
Hình 7.73. Các đầu phun nước chữa cháy sprinkler cần được lắp đặt theo tiêu chuẩn kĩ thuật, trong đó có tiêu chuẩn về khoảng cách tới từng loại trần, tường, nhà.



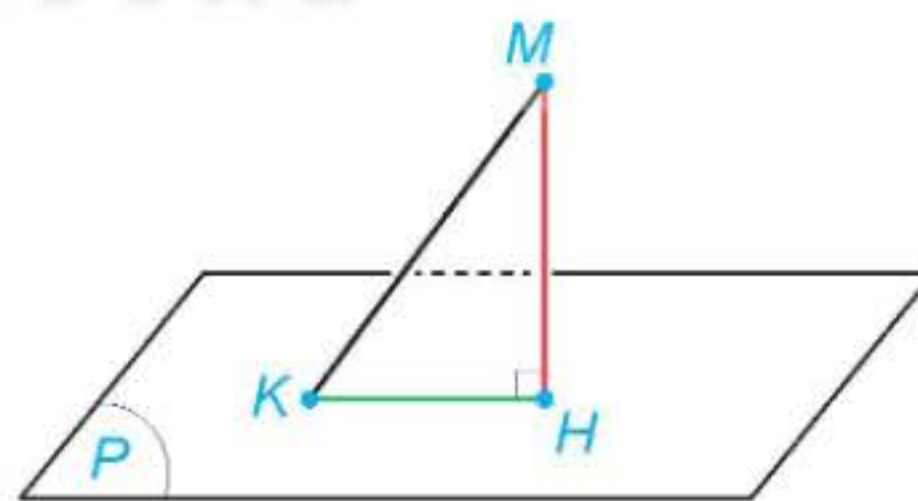
1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

HĐ1

- Cho điểm M và đường thẳng a . Gọi H là hình chiếu của M trên a . Với mỗi điểm K thuộc a , giải thích vì sao $MK \geq MH$ (H.7.74).
- Cho điểm M và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu của M trên (P) . Với mỗi điểm K thuộc (P) , giải thích vì sao $MK \geq MH$ (H.7.75).



Hình 7.74



Hình 7.75

- **Khoảng cách** từ một điểm M đến một đường thẳng a , kí hiệu $d(M, a)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên a .
- Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(M, (P))$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên (P) .

Chú ý. $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi $M \in a$; $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.

Nhận xét. Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

Chú ý. Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là **chiều cao của hình chóp** đó.

» **Ví dụ 1.** Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết độ dài cạnh đáy, cạnh bên tương ứng bằng a, b ($a < b\sqrt{3}$). Tính chiều cao của hình chóp.

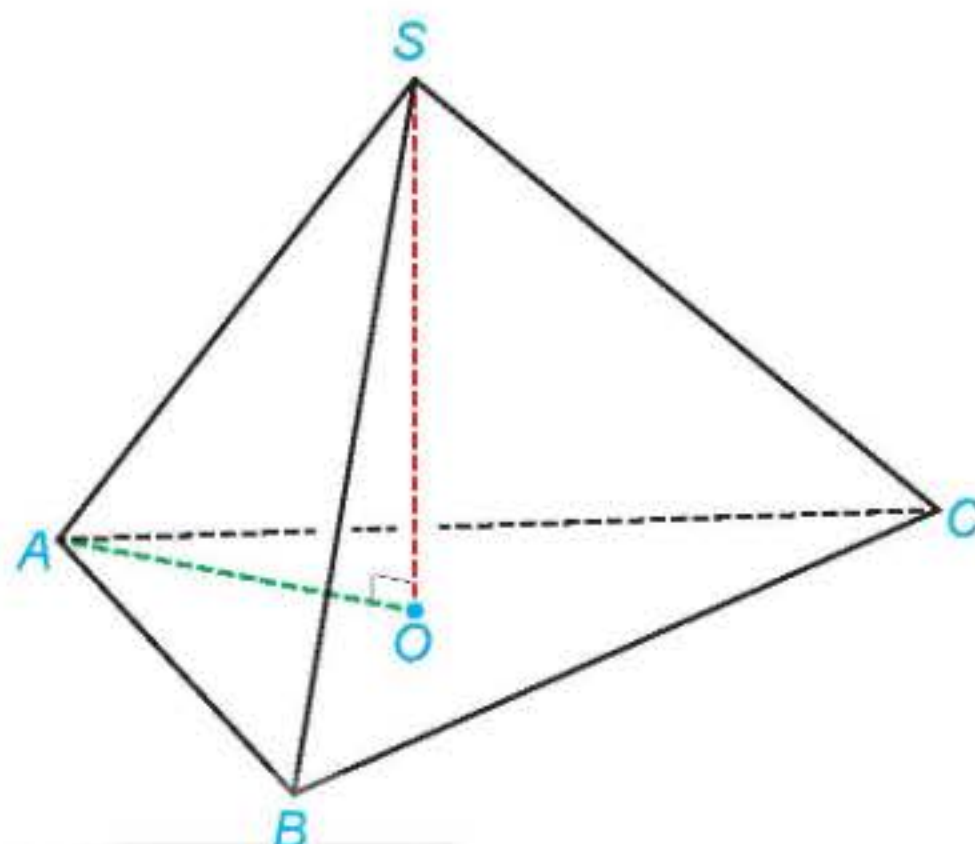
Giải. (H.7.76)

Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm O của tam giác đều ABC . Trong tam giác đều ABC ,

ta có $OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Trong tam giác vuông SOA , ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

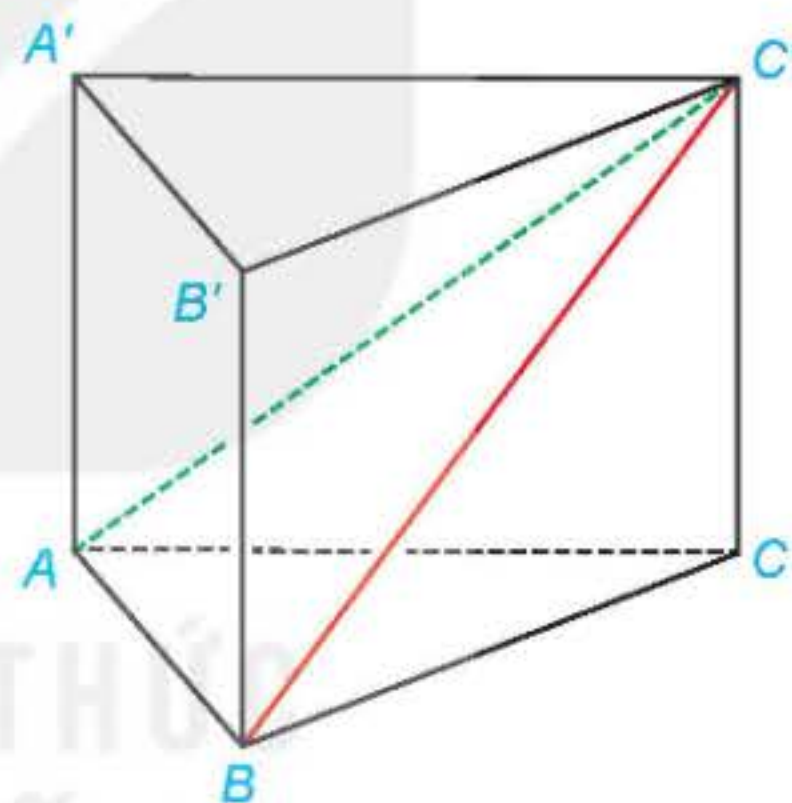
Vậy chiều cao của hình chóp là $SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.



Hình 7.76

» **Luyện tập 1.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a, AA' = h$ (H.7.77).

- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$.
- Tam giác ABC' là tam giác gì? Tính khoảng cách từ A đến BC' .

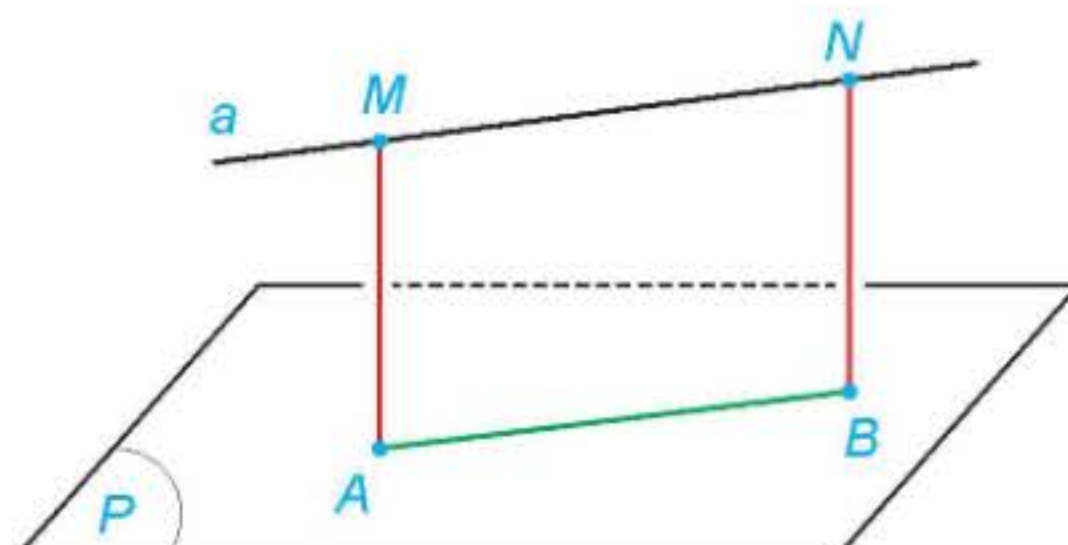


Hình 7.77

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

» **H82.** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Lấy hai điểm M, N bất kì thuộc a và gọi A, B tương ứng là các hình chiếu của chúng trên (P) (H.7.78).

Giải thích vì sao $ABNM$ là một hình chữ nhật và M, N có cùng khoảng cách đến (P) .



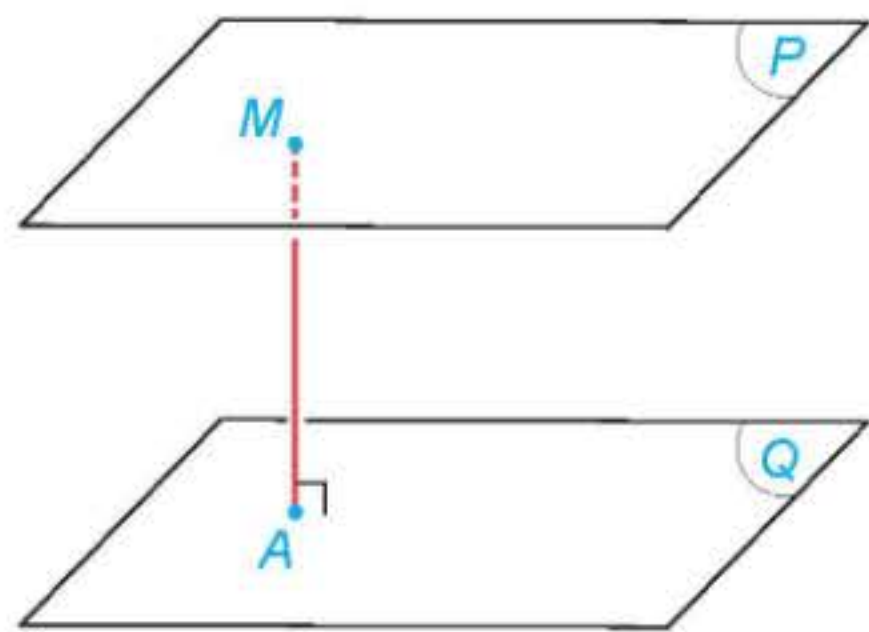
Hình 7.78

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a , kí hiệu $d(a, (P))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P) .

» **H03.** a) Cho hai đường thẳng m và n song song với nhau. Khi một điểm M thay đổi trên m thì khoảng cách từ nó đến đường thẳng n có thay đổi hay không?

b) Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) và một điểm M thay đổi trên (P) (H.7.79). Hỏi khoảng cách từ M đến (Q) thay đổi thế nào khi M thay đổi?

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) , kí hiệu $d((P), (Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n , kí hiệu $d(m, n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.



Hình 7.79

❓ Nếu đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) song song với (P) thì giữa $d(a, (Q))$ và $d((P), (Q))$ có mối quan hệ gì?

Chú ý. Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là **chiều cao của hình lăng trụ** đó.

» **Ví dụ 2.** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $AA' = h$. Tính các khoảng cách giữa $A'C'$ và $(ABCD)$, AA' và $(BDD'B')$.

Giải. (H.7.80)

Đường thẳng $A'C'$ thuộc mặt phẳng $(A'B'C'D')$ nên nó song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng nên $AA' \perp (ABCD)$.

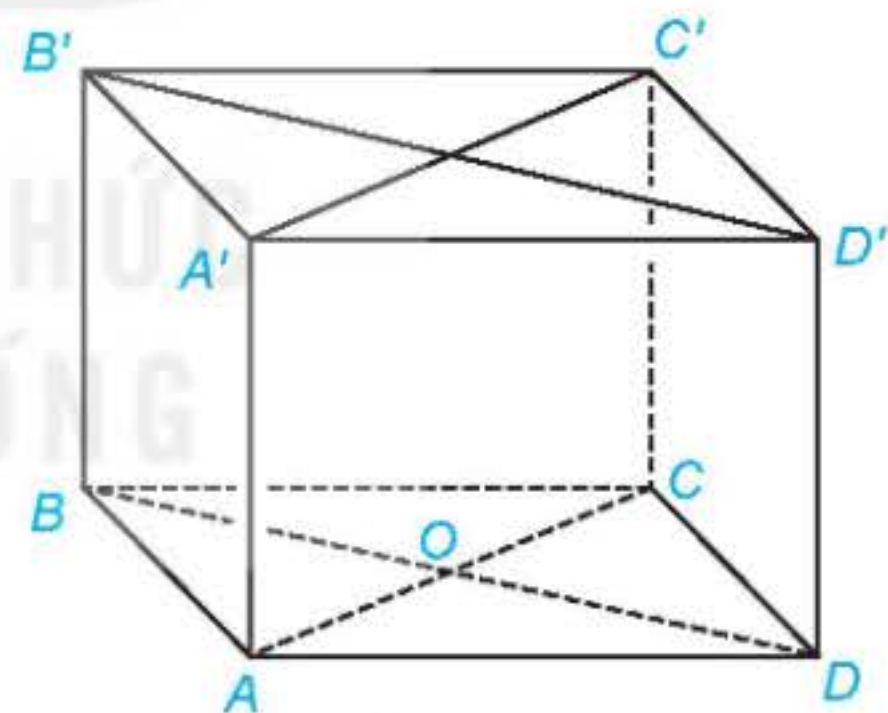
Vậy $d(A'C', (ABCD)) = d(A', (ABCD)) = AA' = h$.

Do AA' song song với BB' nên AA' song song với $(BDD'B')$. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$. Do $AO \perp BD$ và $AO \perp BB'$ nên $AO \perp (BDD'B')$. Vậy khoảng cách giữa AA' và $(BDD'B')$ bằng độ dài đoạn thẳng AO .

Tam giác BAD cân tại A và có $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên $\widehat{ABO} = 30^\circ$.

Do đó, trong tam giác vuông AOB , ta có $AO = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

Vậy khoảng cách giữa AA' và $(BDD'B')$ bằng $\frac{a}{2}$.



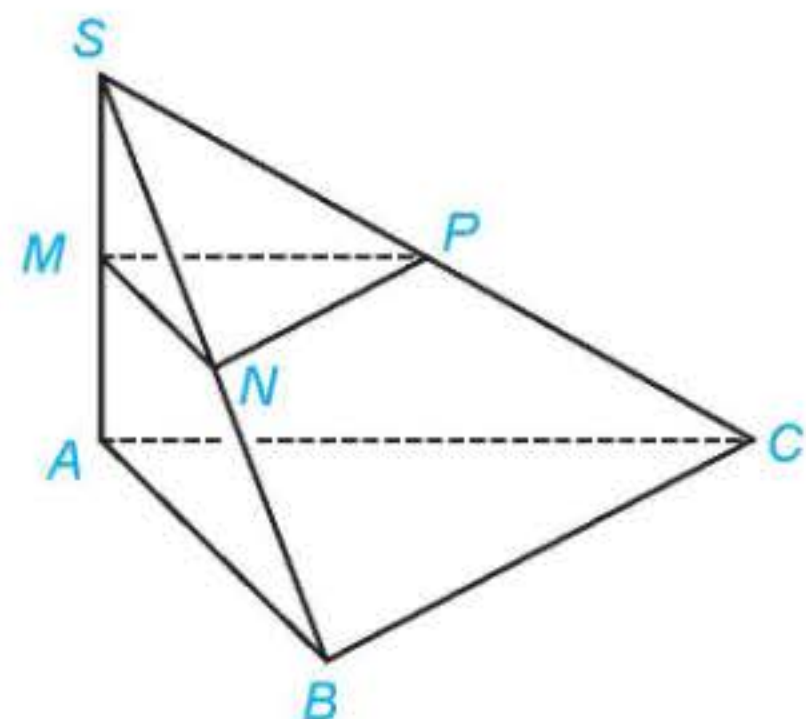
Hình 7.80

» **Luyện tập 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = h$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, SB, SC .

a) Tính $d((MNP), (ABC))$ và $d(NP, (ABC))$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$.

Tính $d(A, (SBC))$.



Hình 7.81

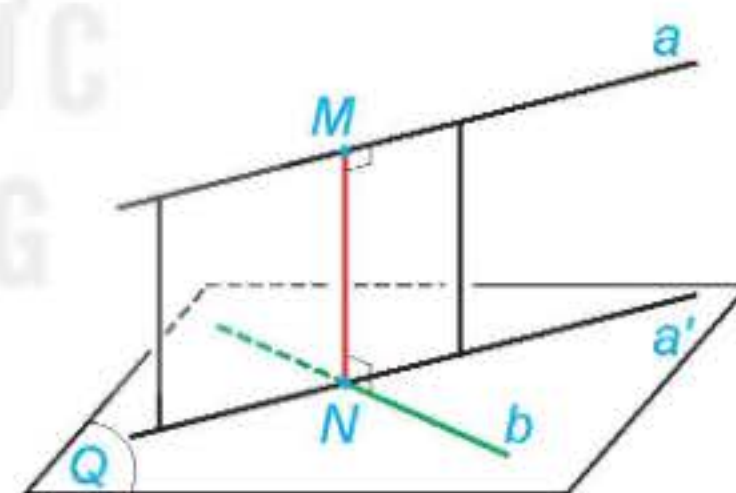
» **Vận dụng.** Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung khổng lồ chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng 2,28 m. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc. Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng 15° so phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa thanh ngang của khung và mặt đường (theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). Hỏi cầu này có cho phép xe cao 2,21 m đi qua hay không?



Hình 7.82. Tại đầu một số cầu vượt ta có thể bắt gặp khung khổng lồ chế chiều cao.

3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

» **HĐ4.** Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng b và song song với a . Hình chiếu a' của a trên (Q) cắt b tại N . Gọi M là hình chiếu của N trên a (H.7.83).

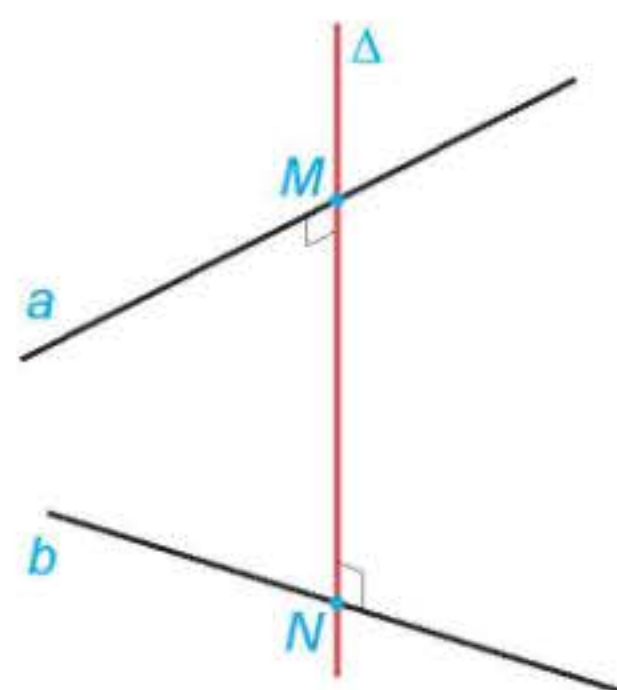


Hình 7.83

- Mặt phẳng chứa a và a' có vuông góc với (Q) hay không?
- Đường thẳng MN có vuông góc với cả hai đường thẳng a và b hay không?
- Nêu mối quan hệ của khoảng cách giữa a , (Q) và độ dài đoạn thẳng MN .

Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a , b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là **đường vuông góc chung** của a và b .

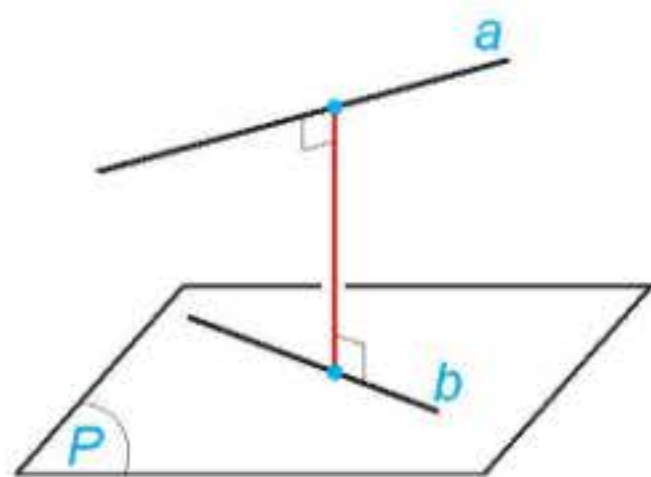
Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a , b tương ứng tại M , N thì độ dài đoạn thẳng MN được gọi là **khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a , b** .



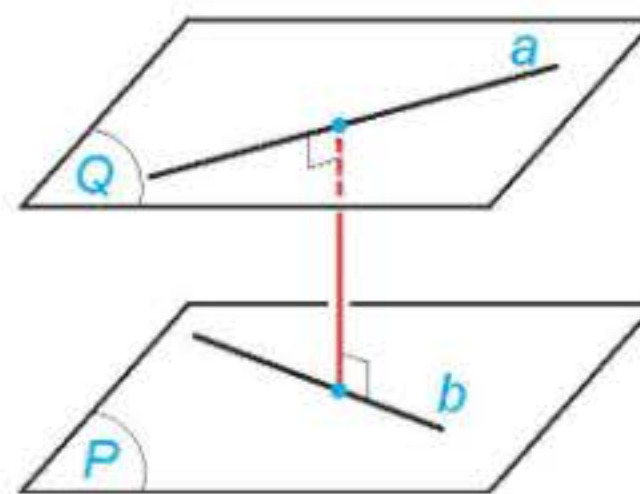
Hình 7.84

Nhận xét

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại (H.7.85).
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, tương ứng chứa hai đường thẳng đó (H.7.86).



Hình 7.85



Hình 7.86

» **Ví dụ 3.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

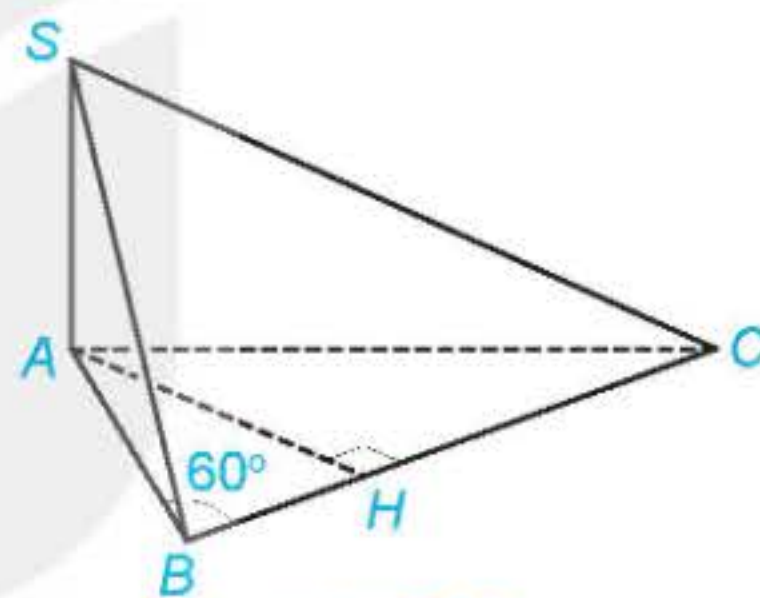
Giải. (H.7.87)

Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Tam giác ABH vuông tại H và có $AB = a$, $\widehat{ABH} = 60^\circ$ nên $BH = \frac{a}{2}$.

Do SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên AH là đường vuông góc chung của SA và BC (H thuộc tia BC và $BH = \frac{a}{2}$).

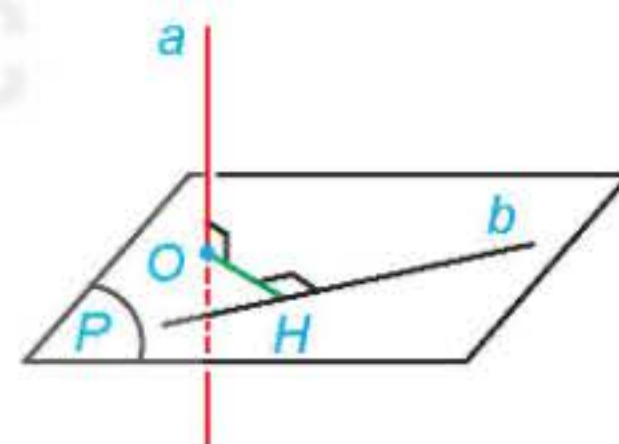
Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là

$$d(SA, BC) = AH = AB \cdot \sin \widehat{ABH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Hình 7.87

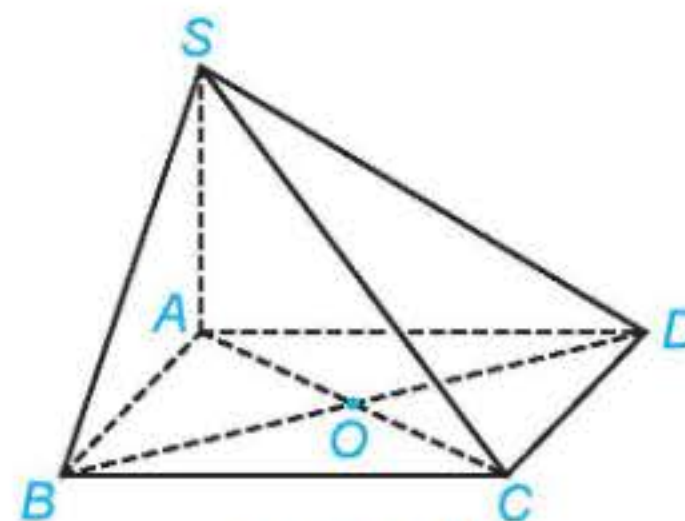
» **Khám phá.** Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt (P) tại O . Cho đường thẳng b thuộc mặt phẳng (P) . Hãy tìm mối quan hệ giữa khoảng cách giữa a , b và khoảng cách từ O đến b (H.7.88).



Hình 7.88

» **Luyện tập 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

- Tính khoảng cách từ A đến SC .
- Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.
- Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa BD và SC .

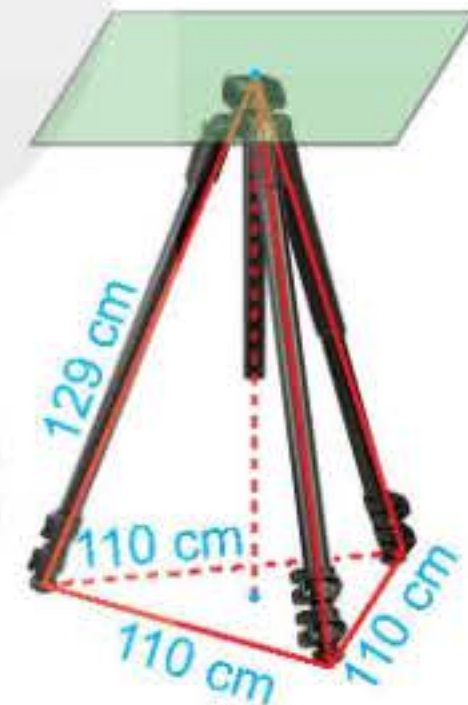


Hình 7.89

» **Thảo luận.** Khoảng cách giữa hai hình được nêu trong bài học (điểm, đường thẳng, mặt phẳng) là khoảng cách nhỏ nhất giữa một điểm thuộc hình này và một điểm thuộc hình kia. Hãy thảo luận để làm rõ nhận xét này.

BÀI TẬP

- 7.22.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là một tam giác đều và $(SAD) \perp (ABCD)$.
- Tính chiều cao của hình chóp.
 - Tính khoảng cách giữa BC và (SAD) .
 - Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AB và SD .
- 7.23.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, $AB = b$, $BC = c$.
- Tính khoảng cách giữa CC' và $(BB'D'D)$.
 - Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AC và $B'D'$.
- 7.24.** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a . Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD . Chứng minh rằng:
- MN là đường vuông góc chung của AB và CD .
 - Các cặp cạnh đối diện trong tứ diện $ABCD$ đều vuông góc với nhau.
- 7.25.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a .
- Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(D'AC)$ và $(BC'A')$ song song với nhau và DB' vuông góc với hai mặt phẳng đó.
 - Xác định các giao điểm E, F của DB' với $(D'AC)$, $(BC'A')$. Tính $d((D'AC), (BC'A'))$.
- 7.26.** Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba góc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 110 cm. Tính chiều cao của giá đỡ, biết các chân của giá đỡ dài 129 cm.
- 7.27.** Một bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang. Trong trường hợp này, độ sâu của bể là khoảng cách giữa mặt nước và đáy bể. Giải thích vì sao để đo độ sâu của bể, ta có thể thả quả dọi chạm đáy bể và đo chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước.



Hình 7.90

Em có biết?

Vì sao vùng phía bắc chí tuyến Bắc và vùng phía nam chí tuyến Nam tia sáng mặt trời không bao giờ vuông góc với mặt đất (tức là, không xảy ra hiện tượng đứng bóng thực sự tại đó)? (Theo *nationalgeographic.com*) (H.7.91a).

Tia sáng mặt trời chỉ vuông góc với mặt đất (tức là có hướng đi qua tâm Trái Đất) tại vị trí P_0 trên mặt đất thuộc đoạn thẳng nối tâm O của Trái Đất và tâm I của Mặt Trời (H.7.91b).

Đường thẳng OI thuộc mặt phẳng chứa quỹ đạo của Trái Đất và trục quay SN (Bắc – Nam) của Trái Đất luôn tạo với mặt phẳng đó một góc khoảng $66,5^\circ$. Từ đó ta có thể rút ra $\widehat{NOI} \geq 66,5^\circ$.

Mỗi vị trí P thuộc vùng phía bắc chí tuyến Bắc đều có vĩ độ bắc $\varphi > 23,5^\circ$, tức là $\widehat{NOP} = 90^\circ - \varphi < 66,5^\circ$. Để ý rằng ON vuông góc với mặt phẳng xích đạo, nên OP tạo với mặt phẳng xích đạo và đường thẳng ON hai góc phụ nhau.

