

THUẬT NGỮ

- Đạo hàm của tổng, hiệu
- Đạo hàm của tích, thương
- Đạo hàm của hàm số hợp
- Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

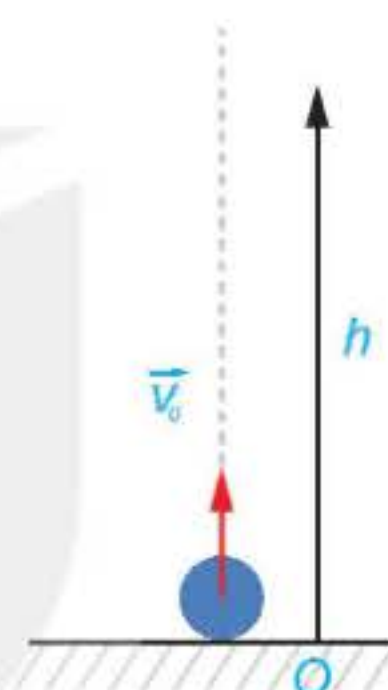
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Tính đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản.
- Sử dụng các công thức tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số và đạo hàm của hàm số hợp.
- Vận dụng các quy tắc đạo hàm để giải quyết một số bài toán thực tiễn.

Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 20$ m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h so với mặt đất (tính bằng mét) của vật tại thời điểm t (giây) sau khi phóng được cho bởi công thức sau:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của vật, $g = 9,8$ m/s² là gia tốc rơi tự do. Hãy tính vận tốc của vật khi nó đạt độ cao cực đại và khi nó chạm đất.



Hình 9.7

1. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

» **HĐ1.** Nhận biết đạo hàm của hàm số $y = x^n$

- Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3$ tại điểm x bất kì.
- Dự đoán công thức đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$(x)' = 1; (x^2)' = 2x.$$



Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

» **HĐ2.** Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x > 0$.

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

» **Ví dụ 1.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại các điểm $x = 4$ và $x = \frac{1}{4}$.

Giải

Với mọi $x \in (0; +\infty)$, ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Do đó $y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ và $y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1$.

2. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

» HỒI 3. Nhận biết quy tắc đạo hàm của tổng

- a) Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + x^2$ tại điểm x bất kì.
b) So sánh: $(x^3 + x^2)'$ và $(x^3)' + (x^2)'$.

Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó

$$\begin{aligned}(u + v)' &= u' + v'; & (u - v)' &= u' - v'; \\ (uv)' &= u'v + uv'; & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0).\end{aligned}$$

Chú ý

- Quy tắc đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.
- Với k là một hằng số, ta có: $(ku)' = ku'$.
- Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ ($v = v(x) \neq 0$).

» Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 1$;

b) $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Giải

a) Ta có:
$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{3}(x^3)' - (x^2)' + 2(x)' + 1' \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x + 2 \\ &= x^2 - 2x + 2.\end{aligned}$$

b) Với mọi $x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

» Ví dụ 3. Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Giải

Phương trình chuyển động của vật là $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

Vận tốc của vật tại thời điểm t được cho bởi $v(t) = h' = v_0 - gt$.

Vật đạt độ cao cực đại tại thời điểm $t_1 = \frac{v_0}{g}$, tại đó vận tốc bằng $v(t_1) = v_0 - gt_1 = 0$.

Vật chạm đất tại thời điểm t_2 mà $h(t_2) = 0$ nên ta có:

$$v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 0 \text{ (loại)}; \quad t_2 = \frac{2v_0}{g}.$$

Khi chạm đất, vận tốc của vật là $v(t_2) = v_0 - gt_2 = -v_0 = -20$ (m/s).

Dấu âm của $v(t_2)$ thể hiện độ cao của vật giảm với vận tốc 20 m/s (tức là chiều chuyển động của vật ngược với chiều dương đã chọn).

» **Luyện tập 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$;

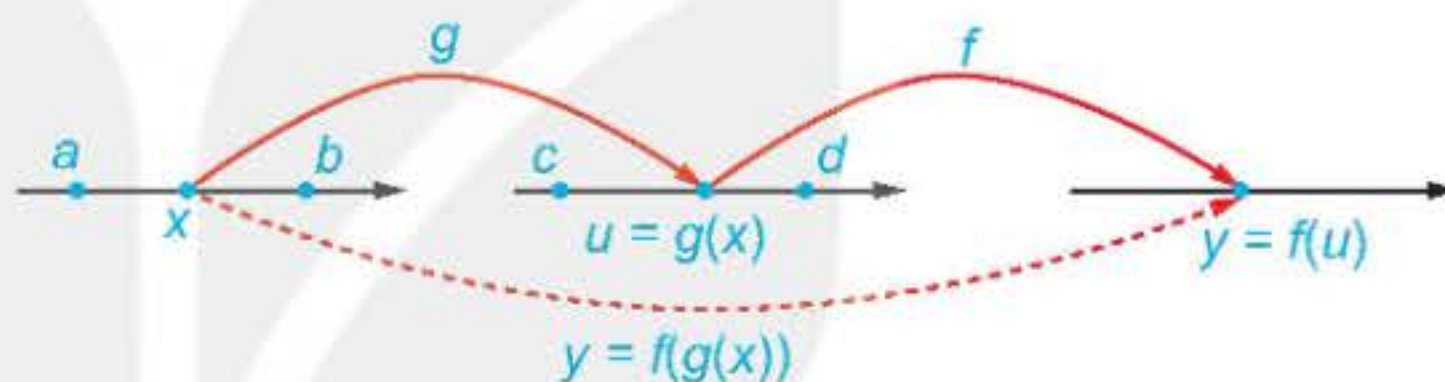
b) $y = (\sqrt{x} + 1)(x^2 + 2)$.

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP

a) Khái niệm hàm số hợp

Diện tích của một chiếc đĩa kim loại hình tròn bán kính r được cho bởi $S = \pi r^2$. Bán kính r thay đổi theo nhiệt độ t của chiếc đĩa, tức là $r = r(t)$. Khi đó, diện tích của chiếc đĩa phụ thuộc nhiệt độ $S = S(t) = \pi(r(t))^2$. Ta nói $S(t)$ là *hàm số hợp* của hàm $S = \pi r^2$ với $r = r(t)$.

Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa trong khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên khoảng $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là **hàm số hợp** của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.



Hình 9.8

» **Ví dụ 4.** Biểu diễn hàm số $y = (2x + 1)^{10}$ dưới dạng hàm số hợp.

Giải

Hàm số $y = (2x + 1)^{10}$ là hàm số hợp của hàm số $y = u^{10}$ với $u = 2x + 1$.

b) Đạo hàm của hàm số hợp

» **HĐ4.** Nhận biết quy tắc đạo hàm của hàm số hợp

Cho các hàm số $y = u^2$ và $u = x^2 + 1$.

a) Viết công thức của hàm số hợp $y = (u(x))^2$ theo biến x .

b) Tính và so sánh: $y'(x)$ và $y'(u) \cdot u'(x)$.

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

» **Ví dụ 5.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Giải

Đặt $u = x^2 + 1$ thì $y = \sqrt{u}$ và $y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, $u'_x = 2x$.

Theo công thức đạo hàm của hàm số hợp, ta có: $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
 Vậy đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Trong thực hành, ta thường trình bày ngắn gọn như sau:

$$y' = (\sqrt{x^2+1})' = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

» **Luyện tập 2.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x-3)^{10}$; b) $y = \sqrt{1-x^2}$.

4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

a) Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

» **HĐ5.** Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

a) Với $h \neq 0$, biến đổi hiệu $\sin(x+h) - \sin x$ thành tích.

b) Sử dụng đẳng thức giới hạn $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ và kết quả của câu a, tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$ tại điểm x bằng định nghĩa.

- Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \sin u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

» **Ví dụ 6.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$.

Giải

Ta có: $y' = \left(2x + \frac{\pi}{8}\right)' \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$.

» **Luyện tập 3.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

» **HĐ6.** Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Bằng cách viết $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$.

- Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \cos u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$.

» **Ví dụ 7.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Giải

Ta có: $y' = -\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)' \cdot \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -4 \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$.

» **Luyện tập 4.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

c) Đạo hàm của các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

» **H07.** Xây dựng công thức tính đạo hàm của các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

- a) Bằng cách viết $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$), tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$.
- b) Sử dụng đẳng thức $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ với $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), tính đạo hàm của hàm số $y = \cot x$.

- Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- Đối với các hàm số hợp $y = \tan u$ và $y = \cot u$, với $u = u(x)$, ta có

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} \text{ (giả thiết } \tan u \text{ và } \cot u \text{ có nghĩa).}$$

» **Ví dụ 8.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

Ta có: $y' = \frac{\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

» **Luyện tập 5.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\tan^2 x + 3\cot\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

» **Vận dụng 1.** Một vật chuyển động có phương trình $s(t) = 4\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)$ (m), với t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc của vật khi $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

5. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

a) Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit

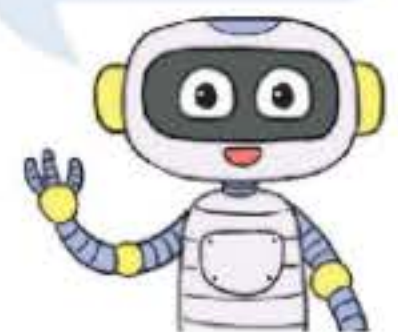
» **H08.** Giới hạn cơ bản của hàm số mũ và hàm số lôgarit

- a) Sử dụng phép đổi biến $t = \frac{1}{x}$, tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
- b) Với $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, tính $\ln y$ và tìm giới hạn của $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y$.
- c) Đặt $t = e^x - 1$. Tính x theo t và tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Nhận xét. Ta có các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e. \\ & \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e. \end{aligned}$$



b) Đạo hàm của hàm số mũ

» **H9.** Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số mũ

a) Sử dụng giới hạn $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ và đẳng thức $e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$, tính đạo hàm của hàm số $y = e^x$ tại x bằng định nghĩa.

b) Sử dụng đẳng thức $a^x = e^{x \ln a}$ ($0 < a \neq 1$), hãy tính đạo hàm của hàm số $y = a^x$.

- Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.
Đối với hàm số hợp $y = e^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(e^u)' = e^u \cdot u'$.
- Hàm số $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \ln a$.
Đối với hàm số hợp $y = a^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$.

» **Ví dụ 9.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2-x}$.

Giải

Ta có: $y' = 2^{x^2-x} \cdot (x^2-x)' \cdot \ln 2 = 2^{x^2-x} (2x-1) \ln 2$.

» **Luyện tập 6.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = e^{x^2-x}$; b) $y = 3^{\sin x}$.

c) Đạo hàm của hàm số lôgarit

» **H10.** Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số lôgarit

a) Sử dụng giới hạn $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ và đẳng thức $\ln(x+h) - \ln x = \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$, tính đạo hàm của hàm số $y = \ln x$ tại điểm $x > 0$ bằng định nghĩa.

b) Sử dụng đẳng thức $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ($0 < a \neq 1$), hãy tính đạo hàm của hàm số $y = \log_a x$.

- Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
Đối với hàm số hợp $y = \ln u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
Đối với hàm số hợp $y = \log_a u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$.

Chú ý. Với $x < 0$, ta có: $\ln|x| = \ln(-x)$ và $[\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$. Từ đó ta có:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0.$$

» **Ví dụ 10.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(x^2 + 1)$.

Giải

Vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi x nên hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có: $y' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

» **Luyện tập 7.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x - 1)$.

» **Vận dụng 2.** Ta đã biết, độ pH của một dung dịch được xác định bởi $\text{pH} = -\log[H^+]$, ở đó $[H^+]$ là nồng độ (mol/lít) của ion hydrogen. Tính tốc độ thay đổi của pH đối với nồng độ $[H^+]$.

BẢNG ĐẠO HÀM

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$ $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$ $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

BÀI TẬP

9.6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$;

b) $y = x^2 - 4\sqrt{x} + 3$.

9.7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x-1}{x+2}$;

b) $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

9.8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \sin^2 x$;

b) $y = \cos^2 x + \sin 2x$;

c) $y = \sin 3x - 3 \sin x$;

d) $y = \tan x + \cot x$.

9.9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2^{3x-x^2}$;

b) $y = \log_3(4x+1)$.

9.10. Cho hàm số $f(x) = 2 \sin^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \leq 6$ với mọi x .

9.11. Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

a) Tại thời điểm $t = 5$ giây;

b) Khi vật chạm đất.

9.12. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0,5 \sin(4\pi t)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?