

THUẬT NGỮ

- Tiệm cận ngang
- Tiệm cận đứng
- Tiệm cận xiên

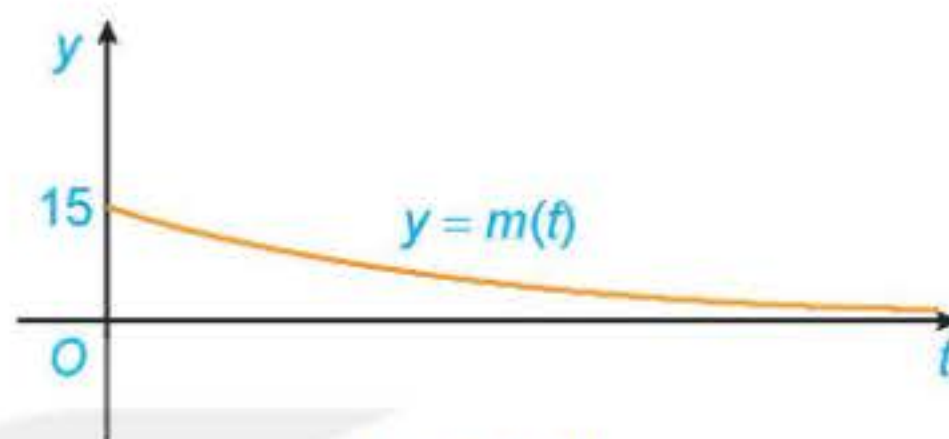
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

Nhận biết hình ảnh hình học của đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Giả sử khối lượng còn lại của một chất phóng xạ (gam) sau t ngày phân rã được cho bởi hàm số

$$y = m(t) = 15e^{-0,012t}.$$

Khối lượng $m(t)$ thay đổi ra sao khi $t \rightarrow +\infty$? Điều này thể hiện trên Hình 1.18 như thế nào?

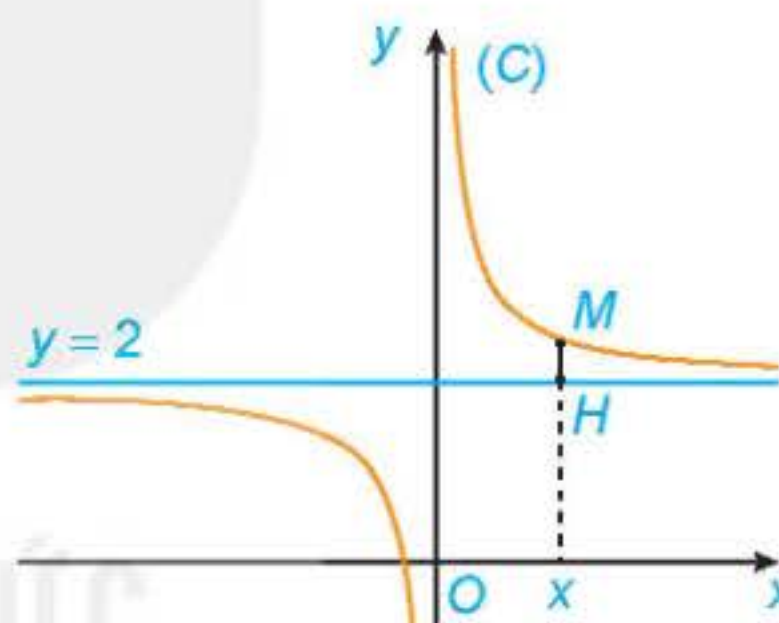


Hình 1.18

1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

» HỎI. Nhận biết đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{x}$ có đồ thị (C) . Với $x > 0$, xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc (C) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $y = 2$ (H.1.19).



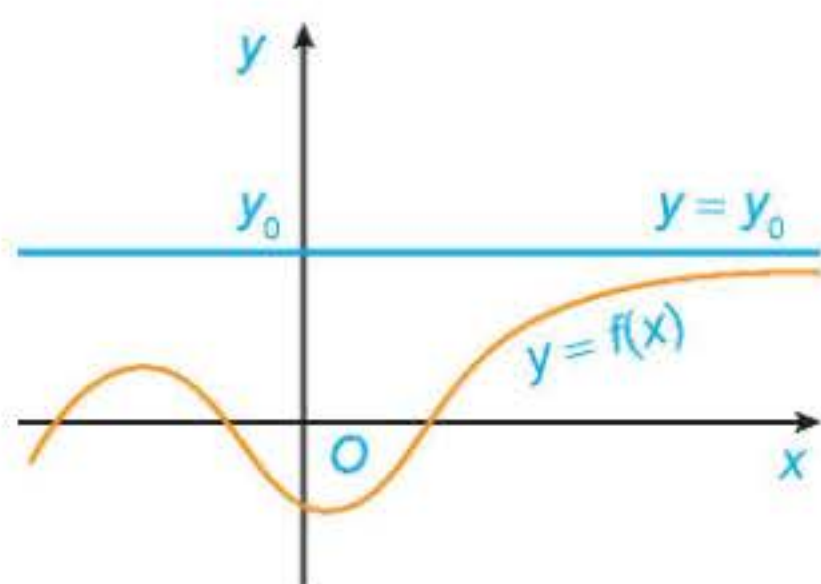
Hình 1.19

a) Tính khoảng cách MH .

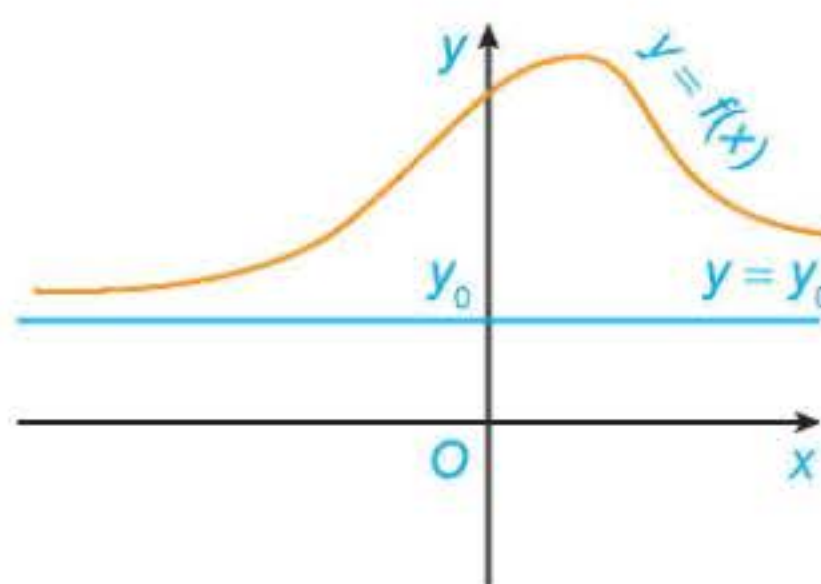
b) Có nhận xét gì về khoảng cách MH khi $x \rightarrow +\infty$?

Đường thẳng $y = y_0$ gọi là **đường tiệm cận ngang** (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Hình 1.20

» **Ví dụ 1.** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$.

Giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

» **Ví dụ 2.** Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Giải

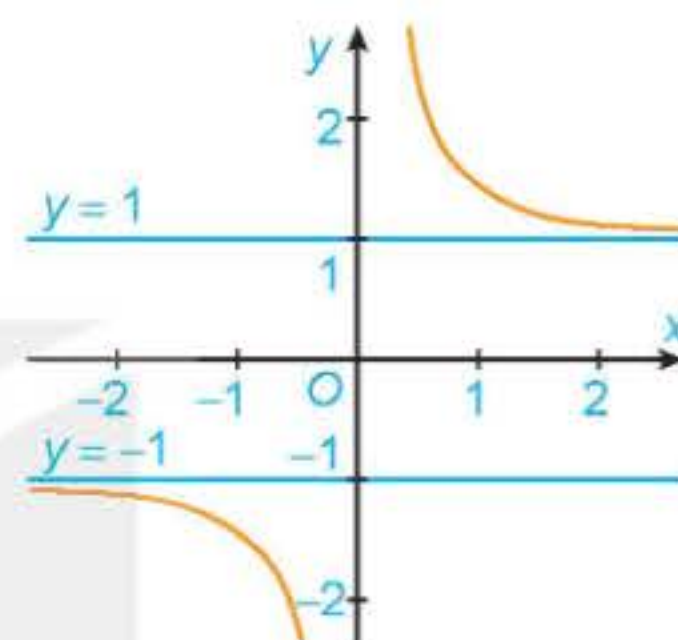
Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = -1.$$

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Nhận xét. Đồ thị hàm số $f(x)$ như Hình 1.21.



Hình 1.21

» **Luyện tập 1.** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

» **Vận dụng 1.** Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

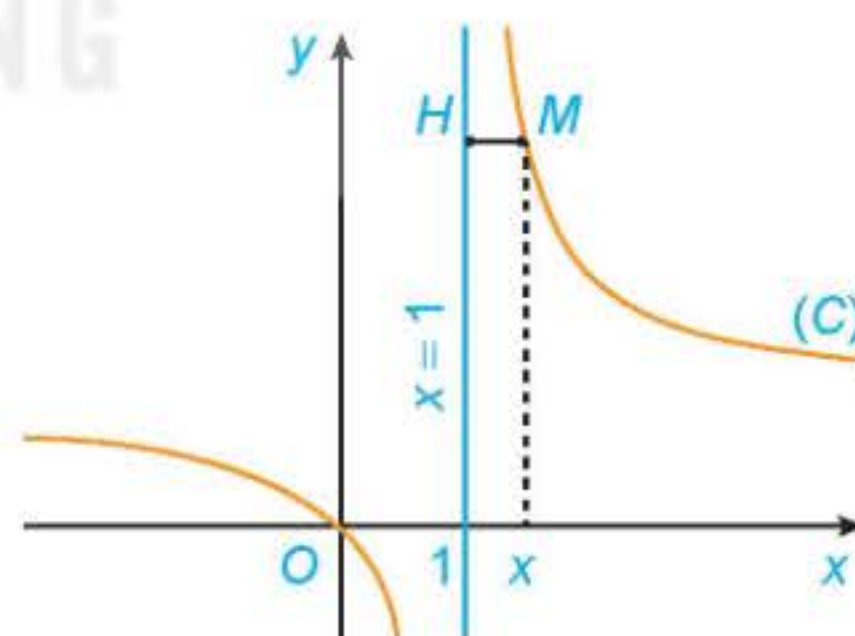
2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

» **HĐ2.** Nhận biết đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ có đồ thị (C). Với $x > 1$, xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $x = 1$ (H.1.22).

a) Tính khoảng cách MH.

b) Khi M thay đổi trên (C) sao cho khoảng cách MH dần đến 0, có nhận xét gì về tung độ của điểm M?



Hình 1.22

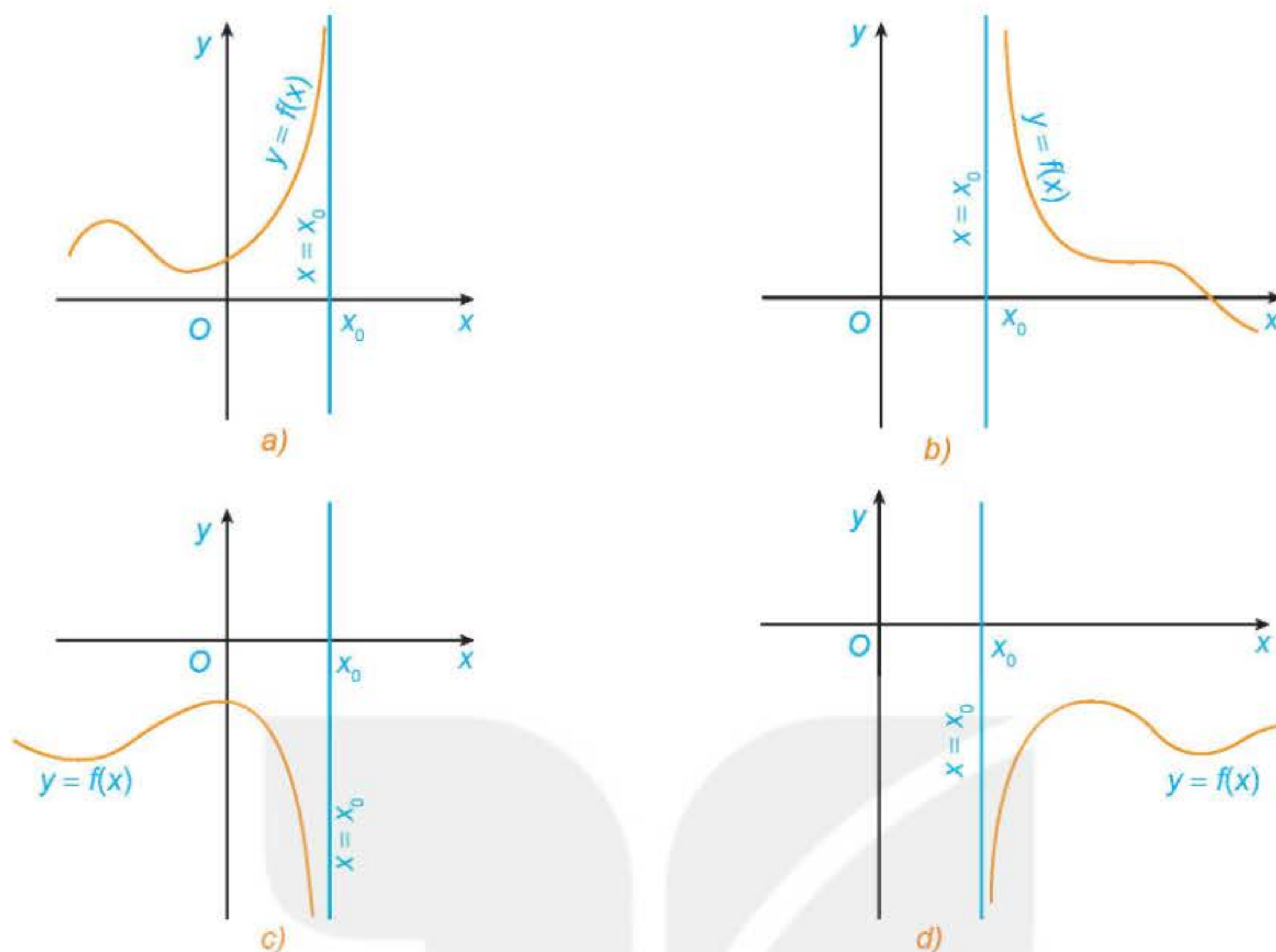
Đường thẳng $x = x_0$ gọi là **đường tiệm cận đứng** (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$



a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^-$).

b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^+$).

Hình 1.23

» **Ví dụ 3.** Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3-x}{x+2}$.

Giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3-x}{x+2} = +\infty$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

» **Ví dụ 4.** Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2+2}{x}$.

Giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+2}{x} = +\infty$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$.

» **Luyện tập 2.** Tìm các tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$.

» **Vận dụng 2.** Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là

$$C(p) = \frac{45p}{100-p} \text{ (triệu đồng), với } 0 \leq p < 100.$$

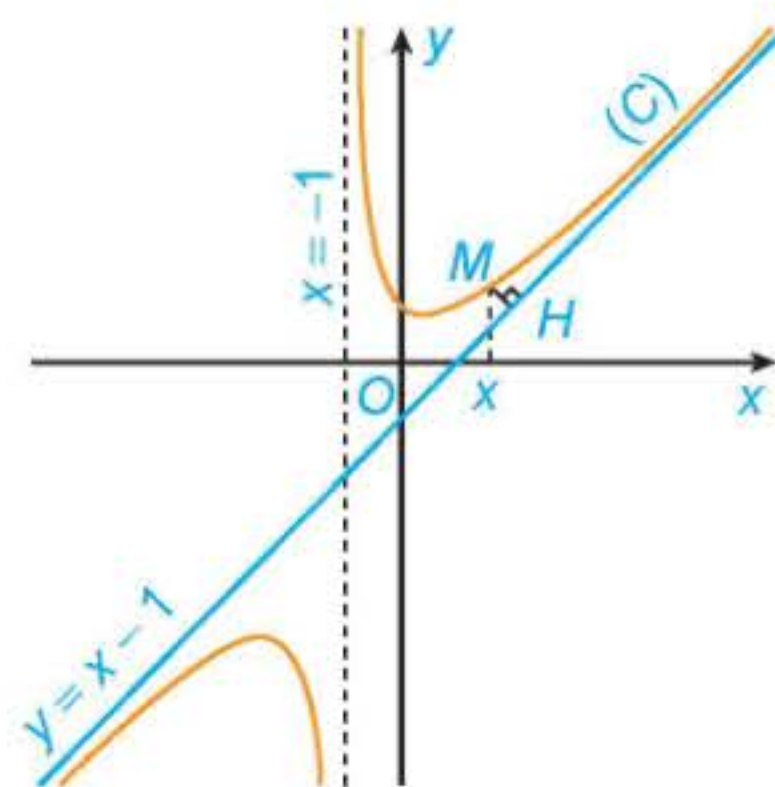
Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa thực tiễn của đường tiệm cận này.

3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

» H03. Nhận biết đường tiệm cận xiên

Cho hàm số $y = f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = x - 1$ như Hình 1.24.

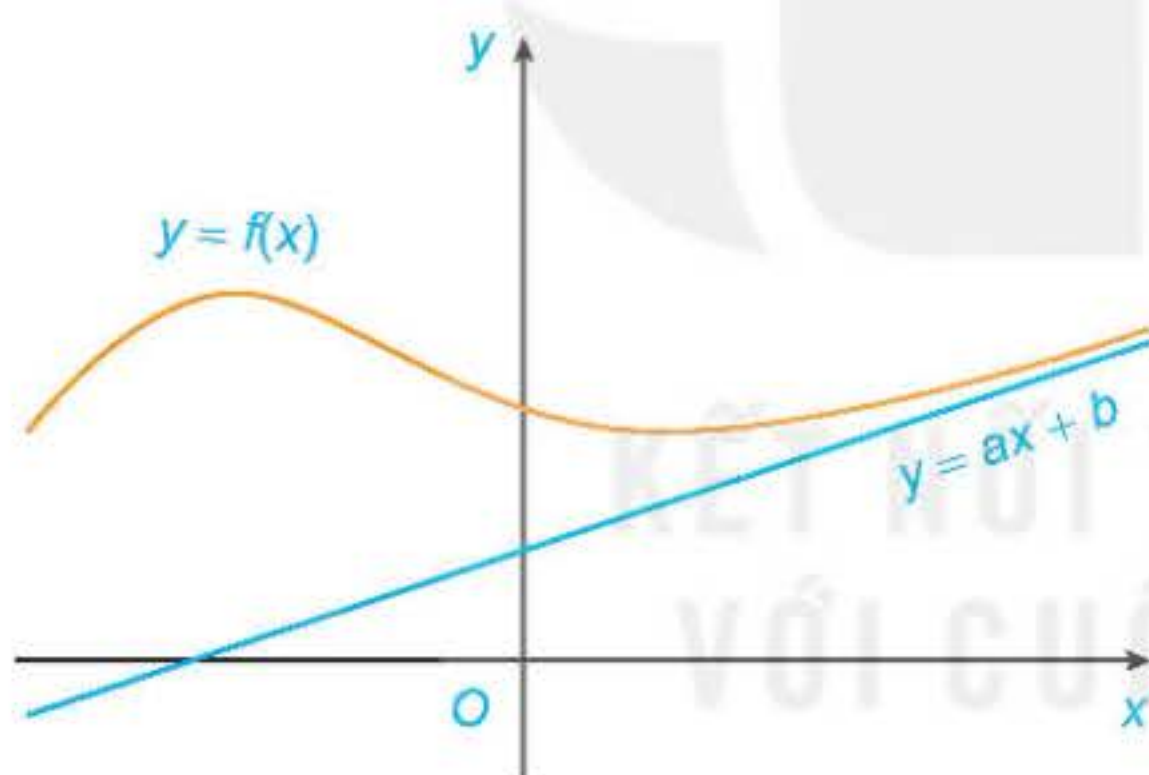
- Với $x > -1$, xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $y = x - 1$. Có nhận xét gì về khoảng cách MH khi $x \rightarrow +\infty$?
- Chứng tỏ rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$. Tính chất này thể hiện trên Hình 1.24 như thế nào?



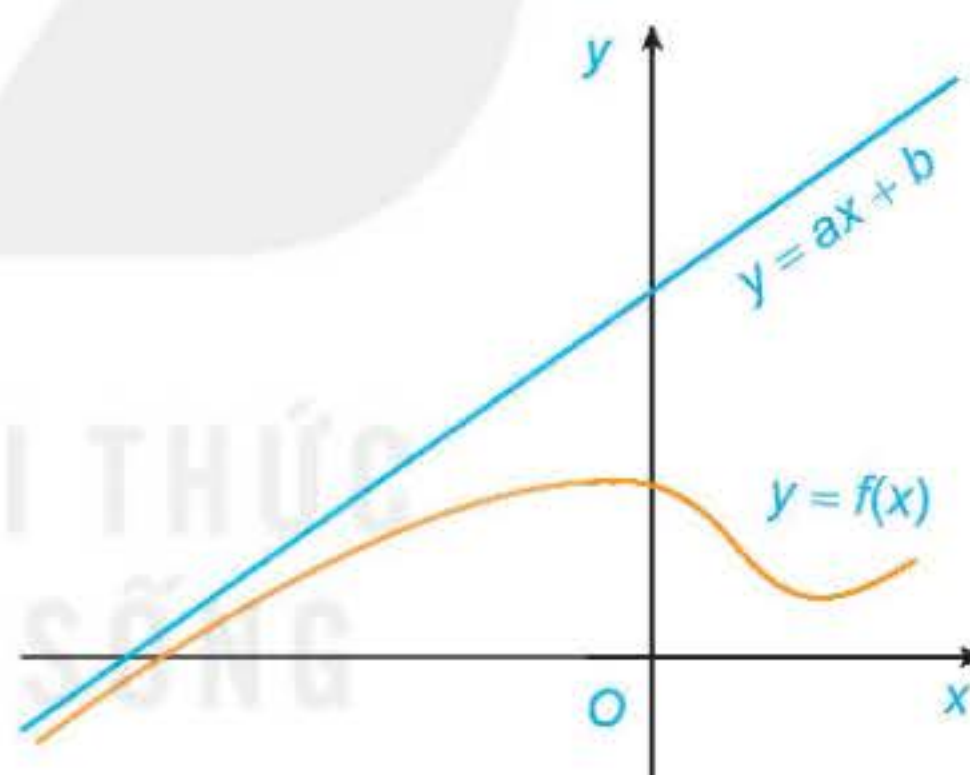
Hình 1.24

Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) gọi là **đường tiệm cận xiên** (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Hình 1.25

» **Ví dụ 5.** Cho hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x+2}$. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$



Chú ý. Ta biết rằng nếu đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] \cdot \frac{1}{x} = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] \cdot \frac{1}{x} = 0$.

Từ đây suy ra $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ hoặc $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Khi đó, ta có $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ hoặc $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

Ngược lại, với a và b xác định như trên, đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đặc biệt, nếu $a = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

» **Ví dụ 6.** Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$.

Giải

Ta có:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 2}{x + 1} = -2.$$

Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -2$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

Nhận xét. Trong thực hành, để tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm phân thức trong Ví dụ 6, ta viết:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = x - 2 + \frac{4}{x + 1}.$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 1} = 0;$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 1} = 0.$$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

» **Luyện tập 3.** Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{1 - x}$.

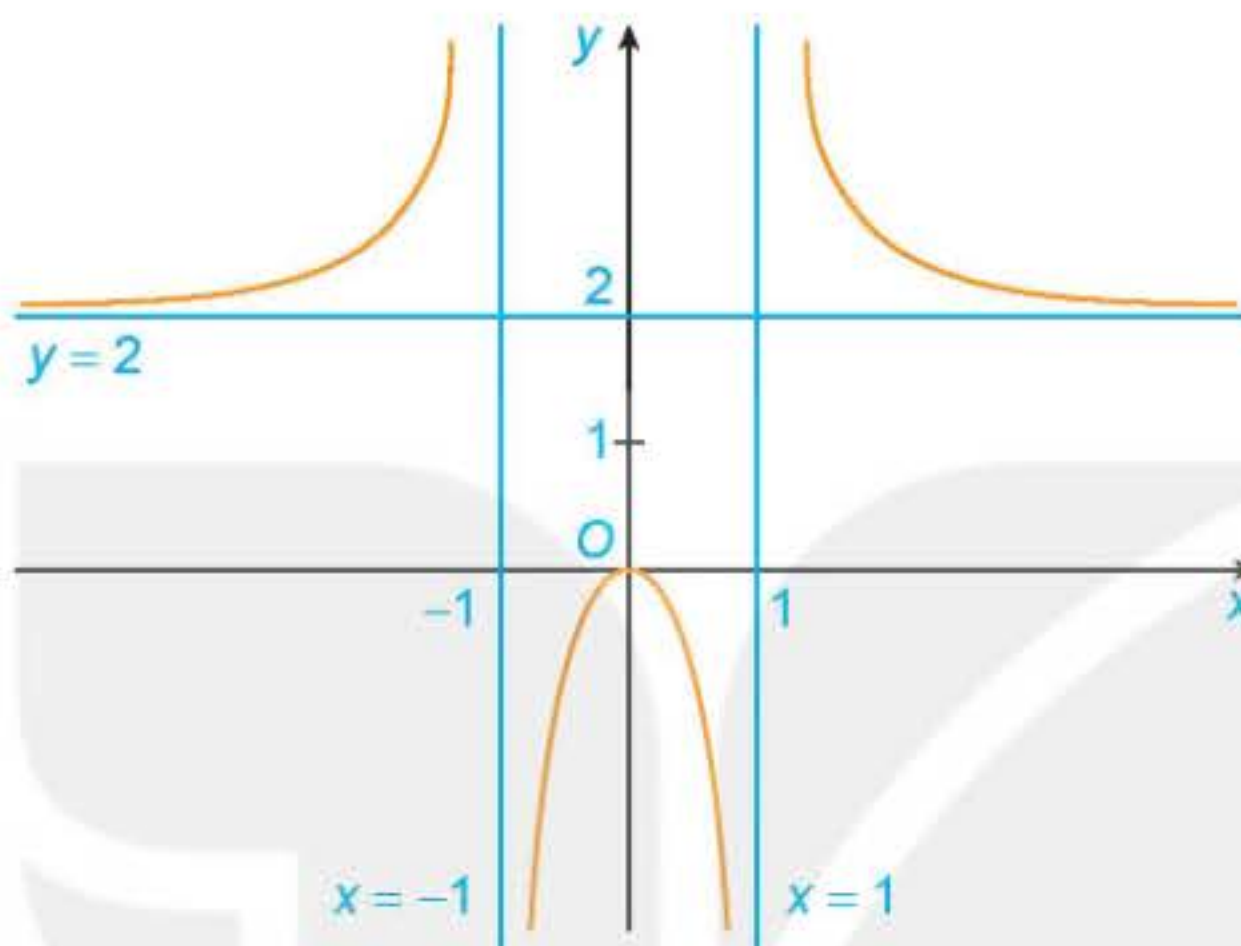
BÀI TẬP

1.16. Hình 1.26 là đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$.

Sử dụng đồ thị này, hãy:

a) Viết kết quả của các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

b) Chỉ ra các tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.



Hình 1.26

1.17. Đường thẳng $x = 1$ có phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ không?

1.18. Tìm các tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{3 - x}{2x + 1}$;

b) $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x + 2}$.

1.19. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là

$$C(x) = 2x + 50 \text{ (triệu đồng)}.$$

Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

1.20. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 144 m^2 . Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là x (m).

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = P(x)$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của các kết quả này.