

CHƯƠNG II

VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Vector trong mặt phẳng là một công cụ hữu hiệu để biểu diễn các đối tượng hình học và các đại lượng có hướng trong mặt phẳng. Với mục đích tương tự, người ta cũng đưa ra khái niệm vector trong không gian. Khái niệm này là cơ sở để xây dựng toạ độ trong không gian, từ đó cho phép đại số hoá các bài toán hình học không gian và giải quyết chúng bằng các biến đổi đại số.



Tờ tiền 200 Franc của Thụy Sĩ gợi lên hình ảnh về một hệ toạ độ trong không gian.

Bài

6

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

THUẬT NGỮ

Vector trong không gian

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết vector trong không gian.
- Nhận biết và thực hiện các phép toán vector trong không gian.

Ở lớp 10, ta đã biết về vector trong mặt phẳng và biết sử dụng vector để biểu thị các đại lượng có hướng và độ lớn trong mặt phẳng, ví dụ như vận tốc hay lực. Đối với các đại lượng có hướng trong không gian, ta có thể sử dụng vector để biểu diễn chúng hay không? Các phép toán vector trong trường hợp này giống và khác như thế nào với các phép toán vector trong mặt phẳng?



Hình 2.1. Các mũi tên chỉ đường gợi lên hình ảnh về vector trong không gian.

1. VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

» H01. Nhận biết vector trong không gian

Trong Hình 2.2, lực căng dây (được tạo ra bởi sức nặng của kiện hàng) được thể hiện bởi các đoạn thẳng có mũi tên màu đỏ.

- Các đoạn thẳng này cho biết gì về hướng và độ lớn của các lực căng dây?
- Các đoạn thẳng này có cùng nằm trong một mặt phẳng không?



Hình 2.2

- Vector trong không gian** là một đoạn thẳng có hướng.
- Độ dài của vector trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vector đó.



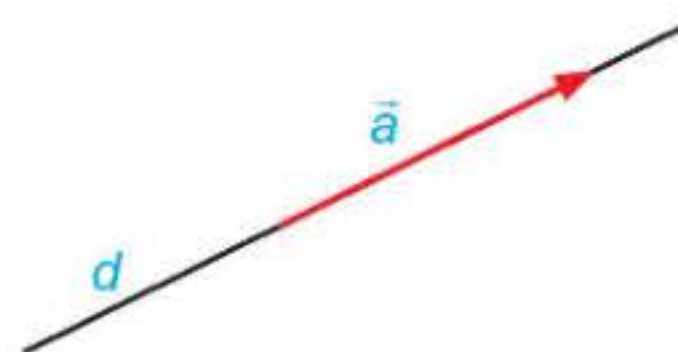
Hình 2.3 cho ta ví dụ về một số đại lượng có thể được biểu diễn bởi vector trong không gian. Hãy tìm thêm một số ví dụ tương tự.



Hình 2.3. Vận tốc gió và vận tốc của máy bay có thể được biểu diễn bởi vector trong không gian.

Chú ý. Tương tự như vector trong mặt phẳng, đối với vector trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Vector có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vector thì vector còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$,...
- Độ dài của vector $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vector $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vector được gọi là giá của vector đó (H.2.4).



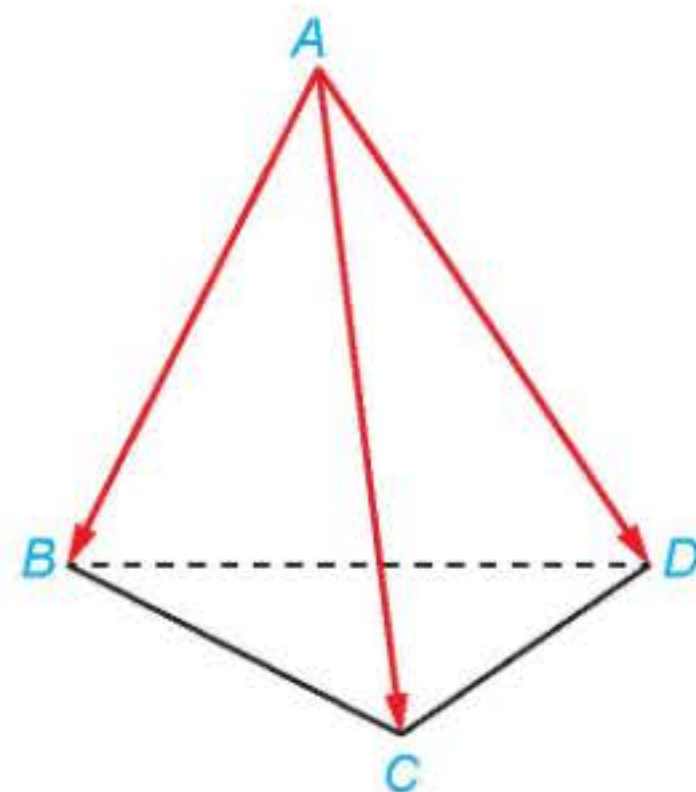
Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vector $\vec{a}$.

» **Ví dụ 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.5).

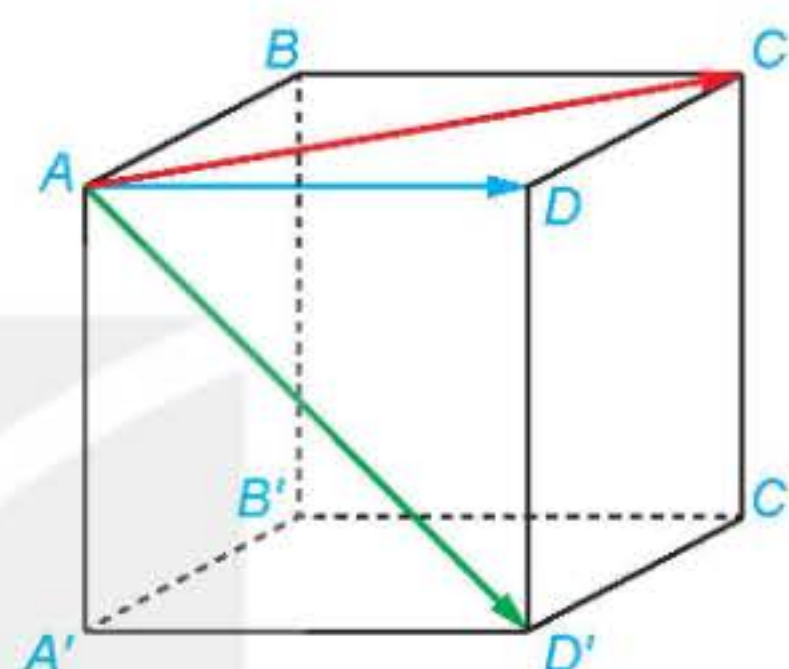
- Có bao nhiêu vector có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?
- Trong các vector tìm được ở câu a, những vector nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) ?
- Tính độ dài của các vector tìm được ở câu a.

Giải

- Có ba vector là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.
- Trong ba vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ chỉ có hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) .
- Vì tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$.



Hình 2.5



Hình 2.6

» **Luyện tập 1.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.6).

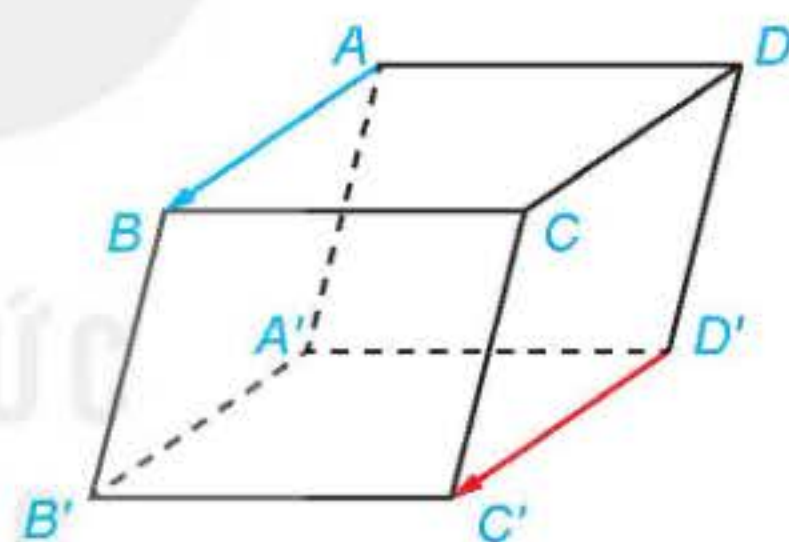
Trong các vector $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD'}$:

- Hai vector nào có giá cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$?
- Hai vector nào có cùng độ dài?

» **HĐ2.** Hình thành khái niệm hai vector cùng phương, cùng hướng/ngược hướng, hai vector bằng nhau trong không gian

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.7).

- So sánh độ dài của hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.
- Nhận xét về giá của hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.
- Hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?



Hình 2.7

Tương tự như trường hợp của vector trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vector trong không gian:

- Hai vector được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vector cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.



Nếu hai vector cùng bằng một vector thứ ba thì hai vector đó có bằng nhau không?

Chú ý. Tương tự như vector trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vector trong không gian:

- Trong không gian, với mỗi điểm O và vector $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

- Các vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$,... gọi là các vector-không.
- Ta quy ước vector-không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vector. Do đó, các vector-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

» **Ví dụ 2.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (H.2.8).

- Trong ba vector $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$, vector nào bằng vector $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.
- Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

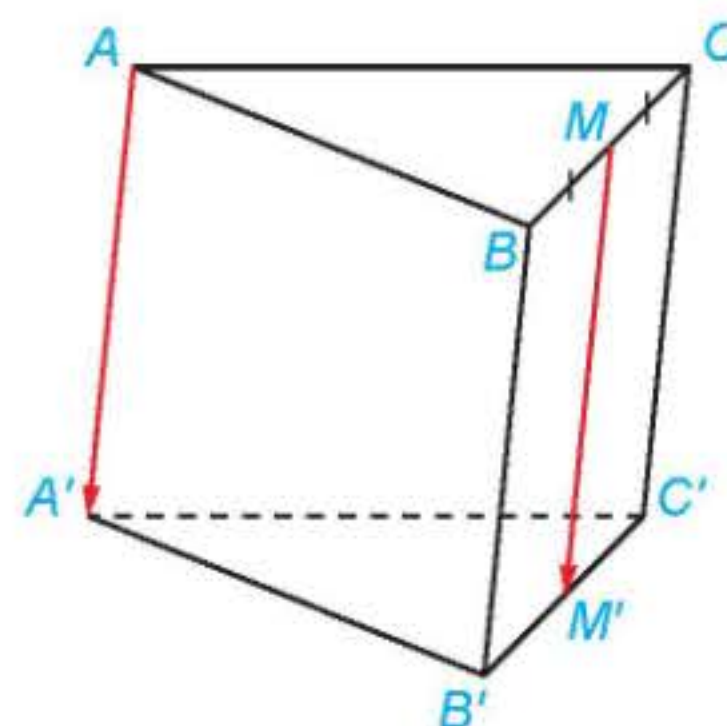
Giải

- Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vector $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương. Do đó, hai vector $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA' \parallel CC'$ và $AA' = CC'$. Hai vector $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vector đó bằng nhau.

Tương tự, hai vector $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vector $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ không bằng nhau.

- Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM' \parallel BB'$ và $MM' = BB'$. Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \parallel BB'$ và $AA' = BB'$, suy ra $MM' \parallel AA'$ và $MM' = AA'$. Hai vector $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.



Hình 2.8

» **Luyện tập 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

- Trong ba vector $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC}$, vector nào bằng vector $\overrightarrow{AB}$?
- Gọi M là một điểm thuộc cạnh AD . Xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

» **Vận dụng 1.** Một toà nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của toà nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vector biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau không? Giải thích vì sao.



Hình 2.9

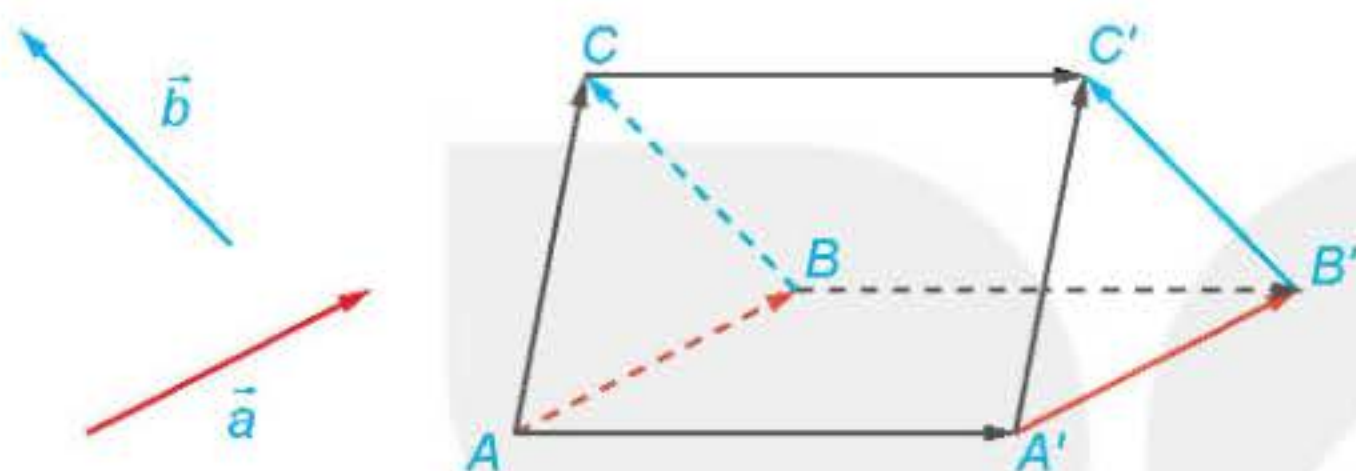
2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

» **H03.** Hình thành khái niệm tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Lấy điểm A và vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Lấy điểm A' khác A và vẽ các vectơ $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B'C'} = \vec{b}$ (H.2.10).

- Giải thích vì sao $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ và $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.
- Giải thích vì sao $AA'C'C$ là hình bình hành, từ đó suy ra $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.



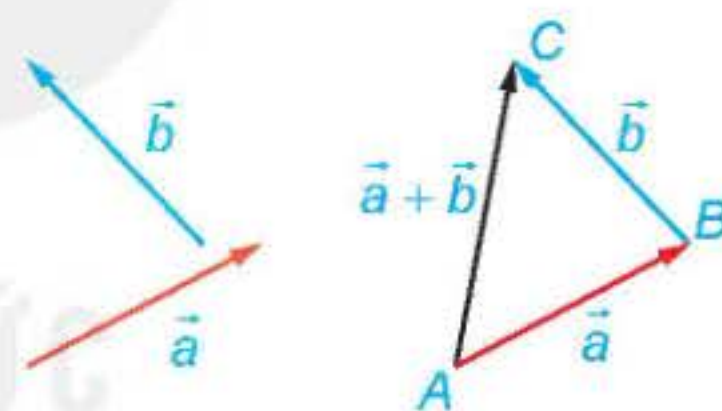
Hình 2.10

Bốn điểm A, B, A', B' đồng phẳng và tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành.



Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là **phép cộng vectơ**.



Hình 2.11

Nhận xét. Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:

- Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

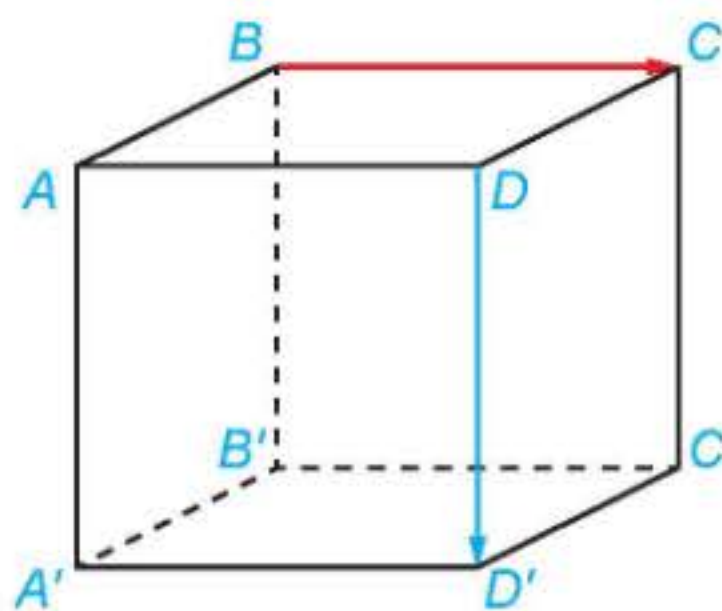
» **Ví dụ 3.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.12). Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}$.

Giải

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Do đó $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'}$.

Tứ giác $ADD'A'$ là hình vuông nên $AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{2}$, suy ra $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}| = \sqrt{2}$.



Hình 2.12

» **Luyện tập 3.** Trong Ví dụ 3, hãy tính độ dài của vector $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'}$.

Chú ý. Tương tự như phép cộng vector trong mặt phẳng, phép cộng vector trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vector bất kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất cộng với vector $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

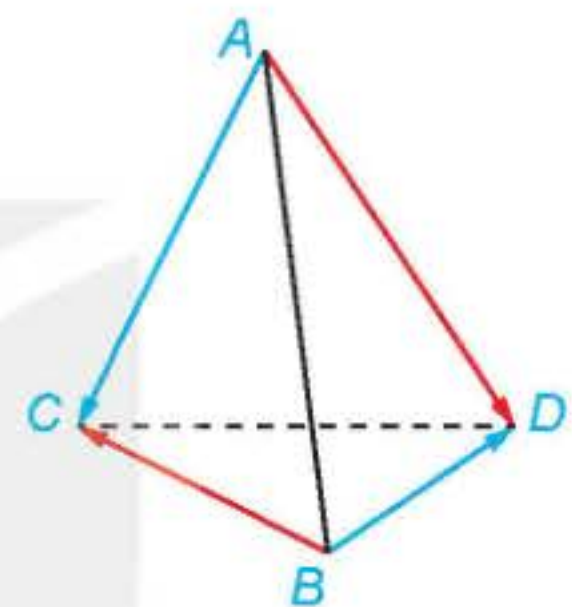
Từ tính chất kết hợp của phép cộng vector trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vector trong không gian.

» **Ví dụ 4.** Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Giải

Theo quy tắc ba điểm trong không gian, ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.
 Từ đó lần lượt áp dụng tính chất của phép cộng vector trong không gian, ta được:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$



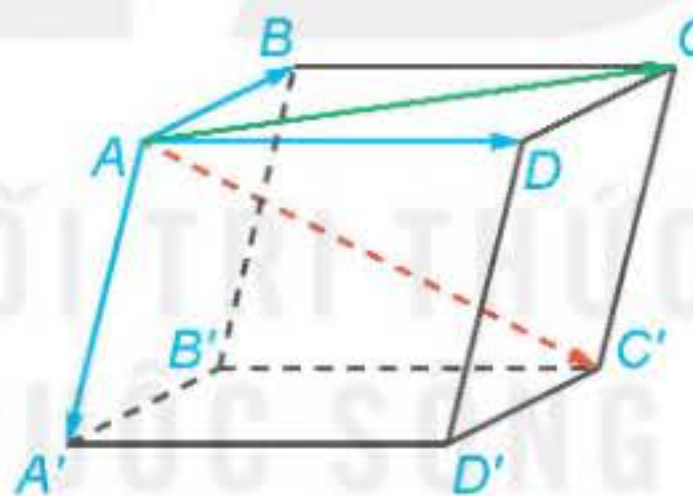
Hình 2.13

» **Luyện tập 4.** Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

» **HĐ4.** Thiết lập quy tắc hình hộp

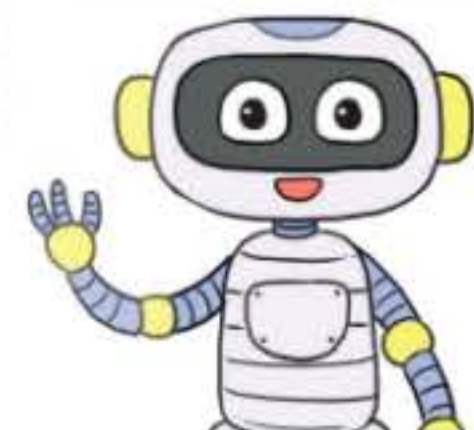
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.14).

- Hai vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$ có bằng nhau hay không?
- Hai vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC'}$ có bằng nhau hay không?



Hình 2.14

Ta có thể áp dụng quy tắc hình bình hành trong không gian.



Kết quả sau đây được gọi là **quy tắc hình hộp**.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

» Trong Hình 2.14, hãy phát biểu quy tắc hình hộp với các vector có điểm đầu là B.

» **Ví dụ 5.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.14). Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Giải

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

» **Luyện tập 5.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD'}$.

b) Hiệu của hai vector trong không gian

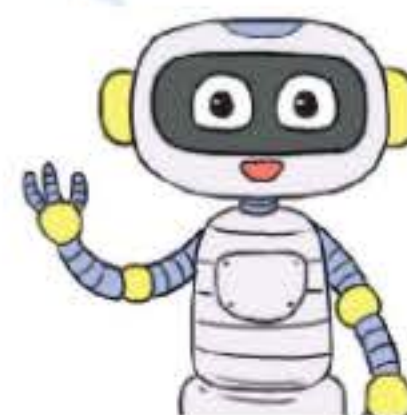
» H05. Nhận biết vector đối của một vector trong không gian

Hình 2.15 mô tả một lọ hoa được đặt trên bàn, trọng lượng của lọ hoa tạo nên một lực tác dụng lên mặt bàn và một phản lực từ mặt bàn lên lọ hoa. Có nhận xét gì về độ dài và hướng của các vector biểu diễn hai lực đó?



Hình 2.15

Theo Định luật III Newton, lực tác dụng và phản lực là hai lực cùng phương, ngược hướng và có độ lớn bằng nhau.



Trong không gian, vector có cùng độ dài và ngược hướng với vector $\vec{a}$ được gọi là vector đối của vector $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Chú ý

- Hai vector là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.
- Vector $\overrightarrow{BA}$ là một vector đối của vector $\overrightarrow{AB}$.
- Vector $\vec{0}$ được coi là vector đối của chính nó.



Tương tự như hiệu của hai vector trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vector trong không gian:

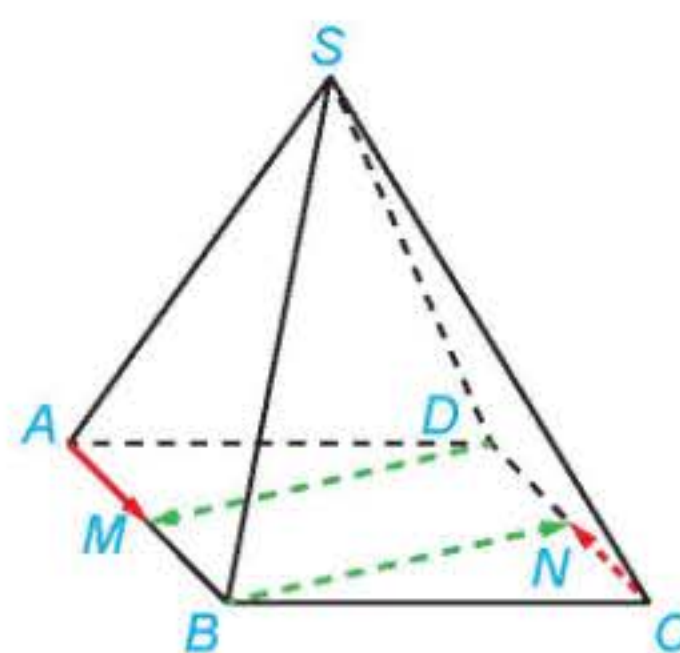
Vector $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là **hiệu của hai vector** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vector được gọi là **phép trừ vector**.

Nhận xét. Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian, ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

» **Ví dụ 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD (H.2.16). Chứng minh rằng:

- $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vector đối nhau;
- $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SA}$.



Hình 2.16

Giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AB \parallel CD$, suy ra $AM = CN$ và $AM \parallel CN$. Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau.

b) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AM}$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{SA}.$$

» **Luyện tập 6.** Trong Ví dụ 6, chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ là hai vectơ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SC}$.

» **Vận dụng 2.** Thang cuốn tại các trung tâm thương mại, siêu thị lớn hay nhà ga, sân bay thường có hai làn, trong đó có một làn lên và một làn xuống. Khi thang cuốn chuyển động, vectơ biểu diễn vận tốc của mỗi làn có là hai vectơ đối nhau hay không? Giải thích vì sao.



Tốc độ di chuyển của thang cuốn thường từ 0,5 m/s đến 0,75 m/s. Khi sử dụng thang cuốn cần giữ tay vịn, tránh để trang phục vướng vào thang và chú ý giám sát trẻ nhỏ đi cùng.



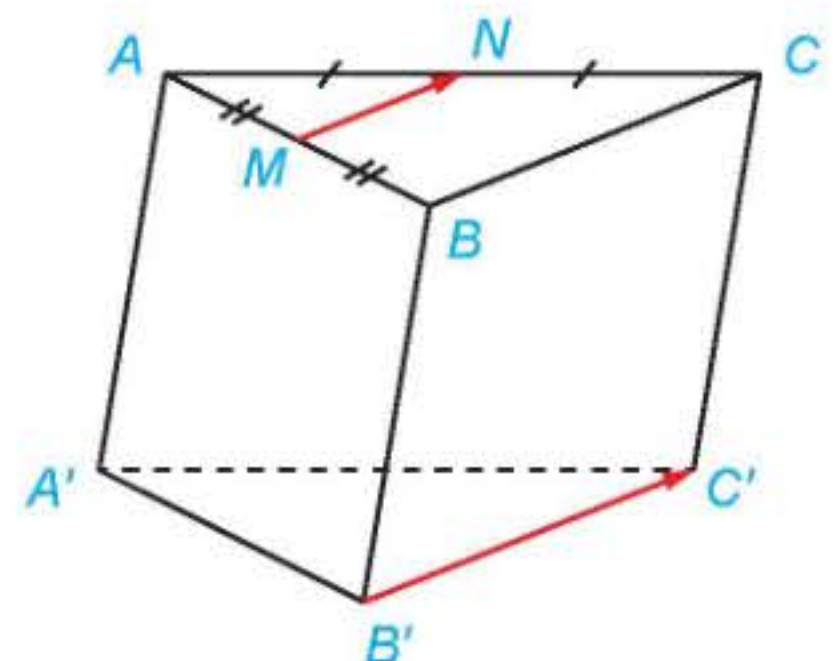
3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

» **H96.** Hình thành khái niệm tích của một số với một vectơ trong không gian

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC (H.2.17).

a) Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?

b) Giải thích vì sao $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{B'C'}|$.



Hình 2.17

Tương tự như tích của một số với một vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về tích của một số với một vectơ trong không gian:

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là **phép nhân một số với một vectơ**.



Hai vectơ $1\vec{a}$ và $\vec{a}$ có bằng nhau không? Hai vectơ $(-1)\vec{a}$ và $-\vec{a}$ có bằng nhau không?

Chú ý

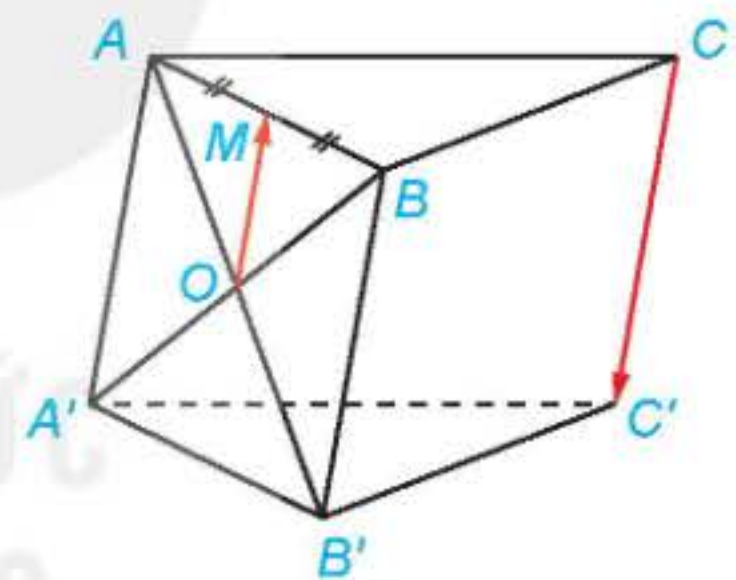
- Quy ước $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$.
- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

» **Ví dụ 7.** Trong H.2.6, gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$ (H.2.18).

Chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.

Giải

Từ đề bài suy ra O là trung điểm của AB' , do đó OM là đường trung bình của tam giác $AB'B$. Suy ra $B'B \parallel OM$ và $B'B = 2OM$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $B'B \parallel C'C$ và $B'B = C'C$. Do đó $C'C \parallel OM$ và $C'C = 2OM$. Vì hai vectơ $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.



Hình 2.18

» **Luyện tập 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB sao cho $SE = \frac{1}{3}SA$; $SF = \frac{1}{3}SB$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

Chú ý. Tương tự như phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.
- Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ và $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $1\vec{a} = \vec{a}$ và $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

» **Ví dụ 8.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD (H.2.19). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

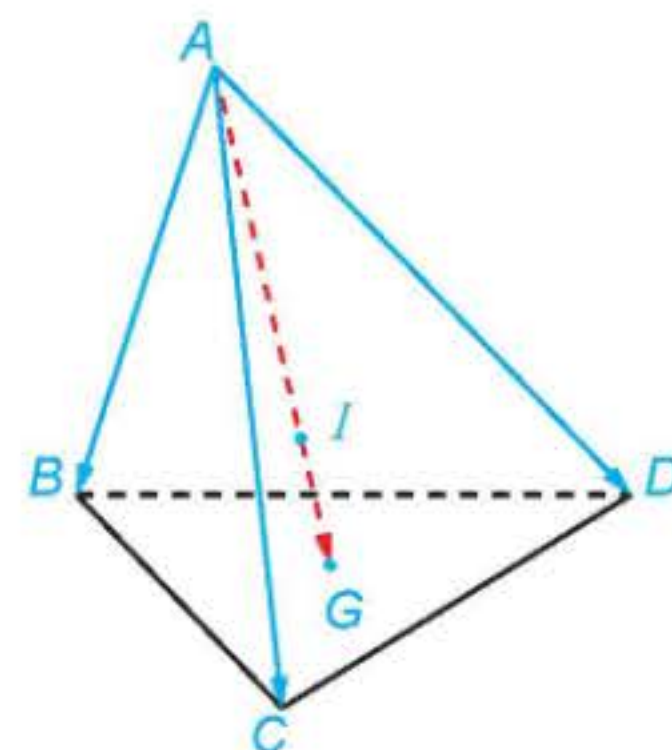
Giải

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Do đó ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$
 $= 3\overrightarrow{AG} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 3\overrightarrow{AG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{AG}$.

Chú ý. Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tùy ý, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$$



Hình 2.19

» **Luyện tập 8.** Trong Ví dụ 8, gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng AG sao cho $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$ (H.2.19). Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

Điểm I trong Luyện tập 8 được gọi là *trọng tâm* của tứ diện $ABCD$.

» **Vận dụng 3.** Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (H.2.20). Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vector $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$. Hãy giải thích vì sao $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2}$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.20

4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

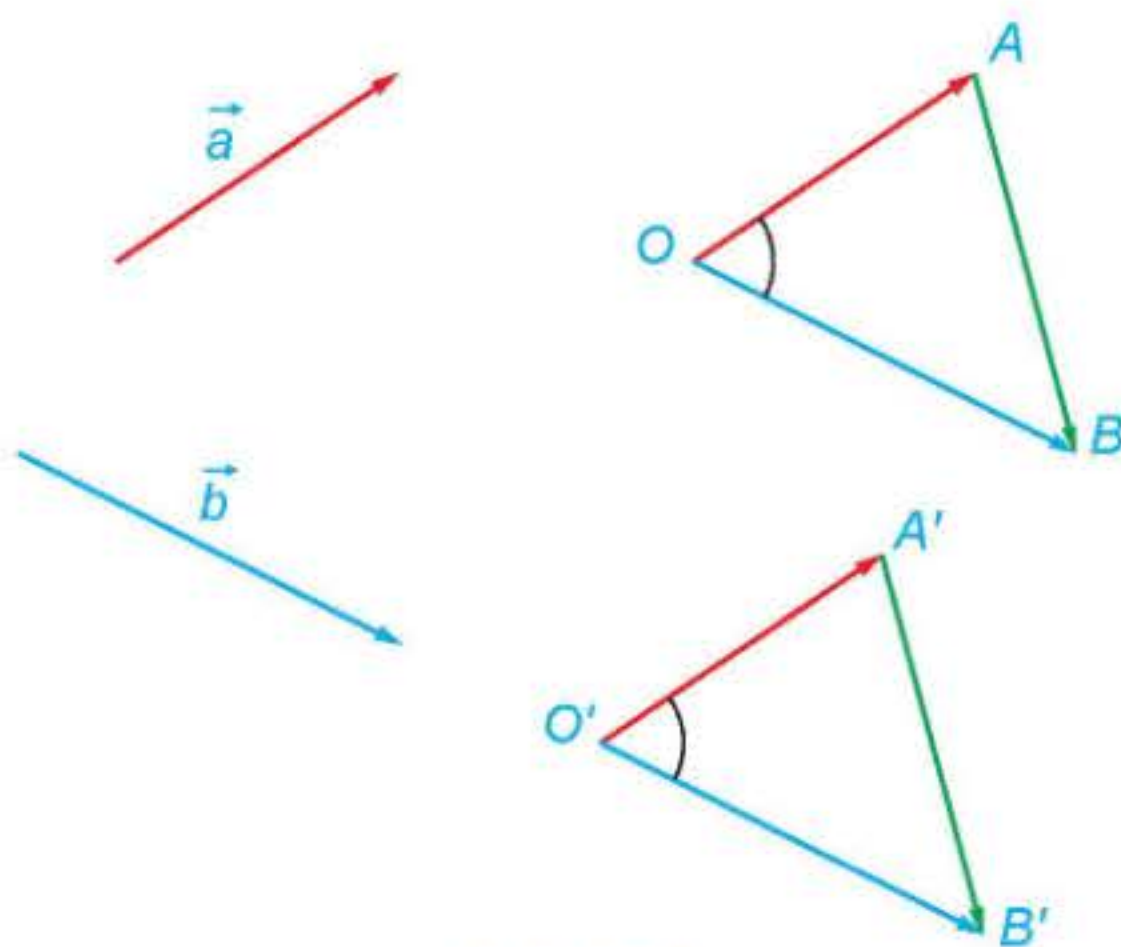
a) Góc giữa hai vector trong không gian

» **HĐ7.** Hình thành khái niệm góc giữa hai vector trong không gian

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy điểm O và vẽ các vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Lấy điểm O' khác O và vẽ các vector $\overrightarrow{O'A'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{O'B'} = \vec{b}$ (H.2.21).

a) Giải thích vì sao $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

b) Áp dụng định lí cosin cho hai tam giác OAB và $O'A'B'$ để giải thích vì sao $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$.



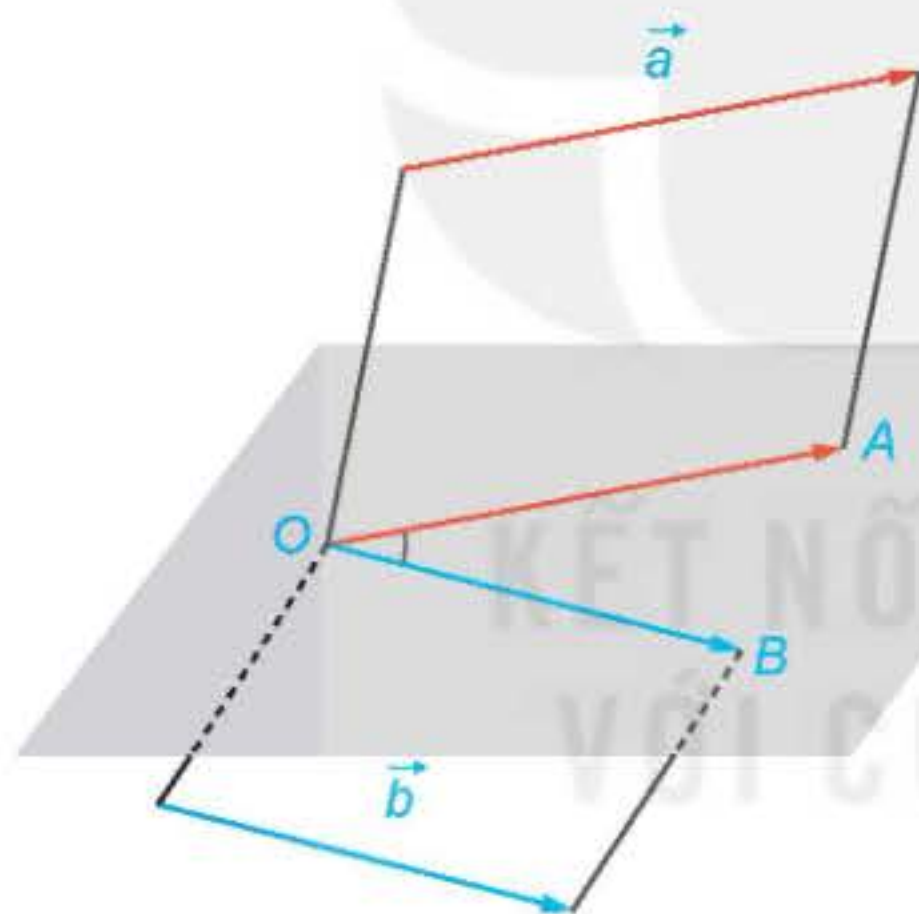
Hình 2.21

Áp dụng định lí côsin cho tam giác OAB , ta có:

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB}.$$

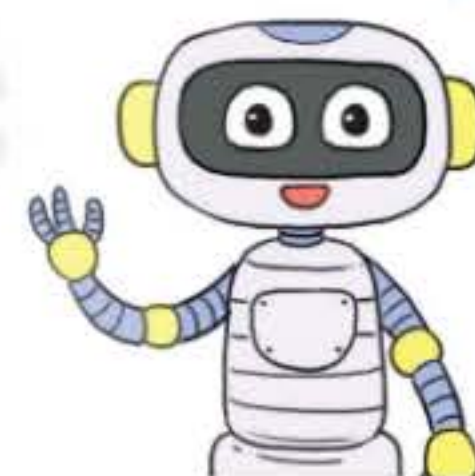


Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A , B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}$ ($0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$) được gọi là **góc giữa hai vector** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



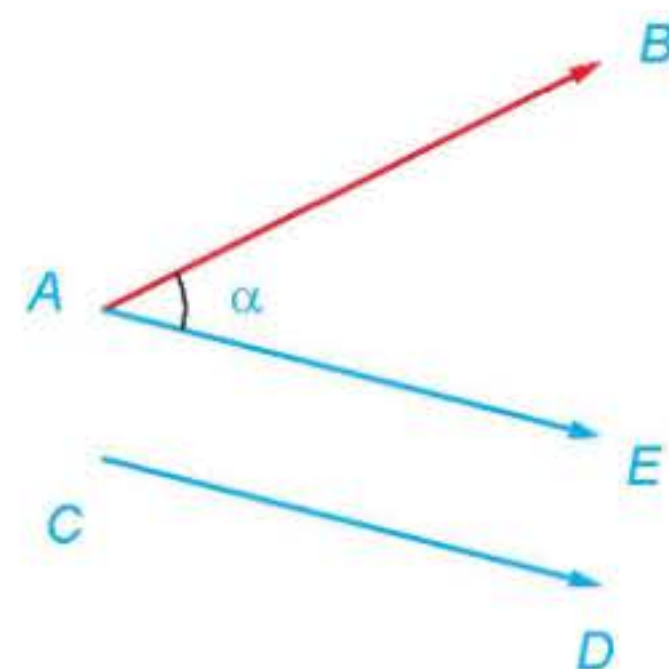
Hình 2.22

Nếu góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 90° thì ta nói hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Chú ý

- Để xác định góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \widehat{BAE}$ (H.2.23).
- Quy ước góc giữa một vector bất kì và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .



Hình 2.23



Xác định góc giữa hai vector cùng hướng (và khác $\vec{0}$), góc giữa hai vector ngược hướng trong không gian.

» **Ví dụ 9.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.24).

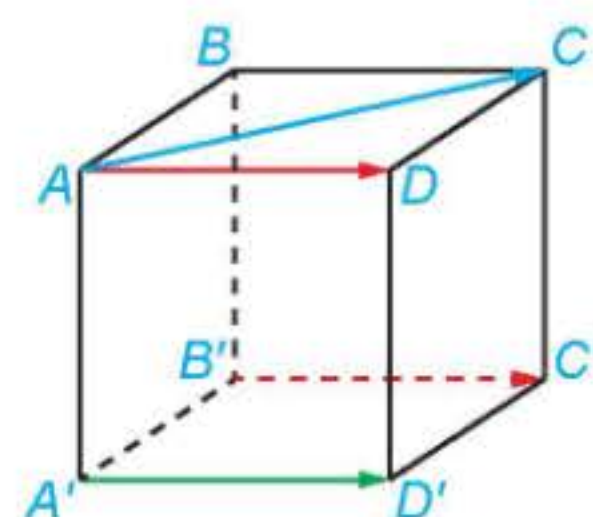
Tính góc giữa các cặp vector sau:

- a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$; b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

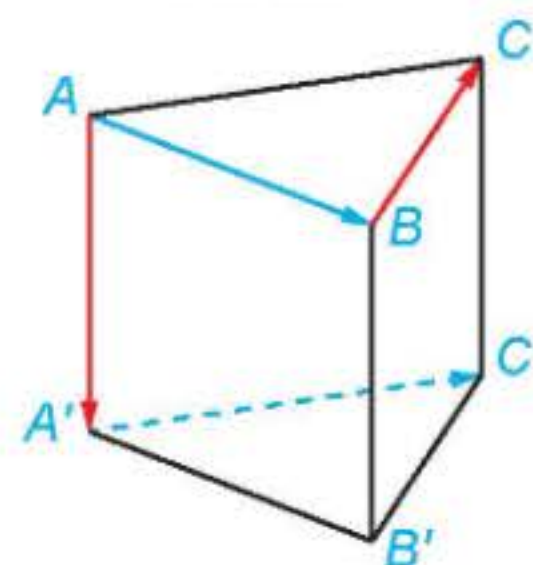
Giải

- a) Hai vector $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{B'C'}) = 0^\circ$.
 b) Vì tứ giác $ADD'A'$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$. Do đó $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{CAD}$. Tam giác ADC vuông cân tại D nên $\widehat{CAD} = 45^\circ$, vì vậy $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}) = 45^\circ$.

» **Luyện tập 9.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ (H.2.25). Tính các góc $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC})$ và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$.



Hình 2.24



Hình 2.25

b) Tích vô hướng của hai vector trong không gian

» **H88.** Nhận biết khái niệm tích vô hướng của hai vector trong không gian

Hãy nhắc lại công thức xác định tích vô hướng của hai vector trong mặt phẳng.

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. **Tích vô hướng** của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Chú ý

- Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Cho hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Với mọi vector $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
- Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vector khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

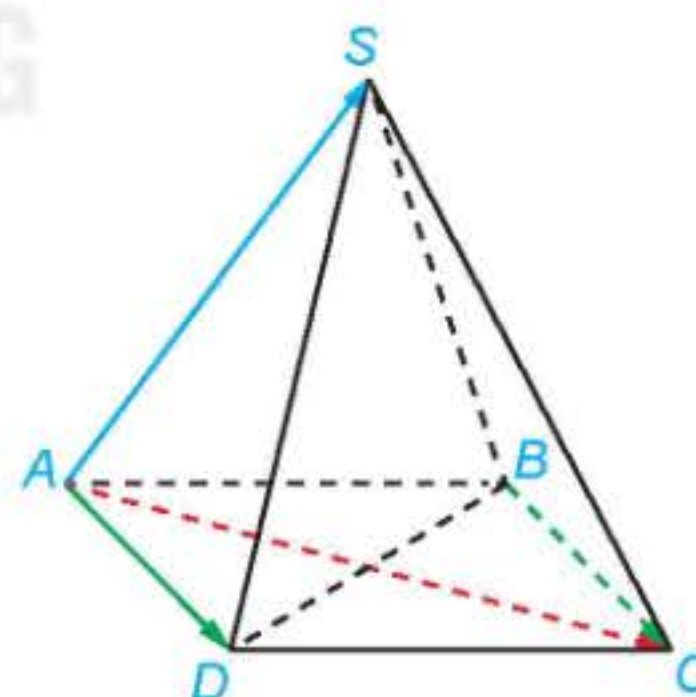
» **Ví dụ 10.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a (H.2.26). Tính các tích vô hướng sau:

- a) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Giải

- a) Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{SAD} = 60^\circ$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{SAD} = 60^\circ$. Do đó

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}.$$



Hình 2.26

b) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$. Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S , suy ra $\widehat{SAC} = 45^\circ$. Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \widehat{SAC} = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

» **Luyện tập 10.** Trong Ví dụ 10, hãy tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Nhận xét. Tích vô hướng của hai vector trong không gian cũng có các tính chất giống như các tính chất của tích vô hướng của hai vector trong mặt phẳng. Cụ thể, nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là các vector trong không gian và k là một số thực thì ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

» **Ví dụ 11.** Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD (H.2.27). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$;

b) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$.

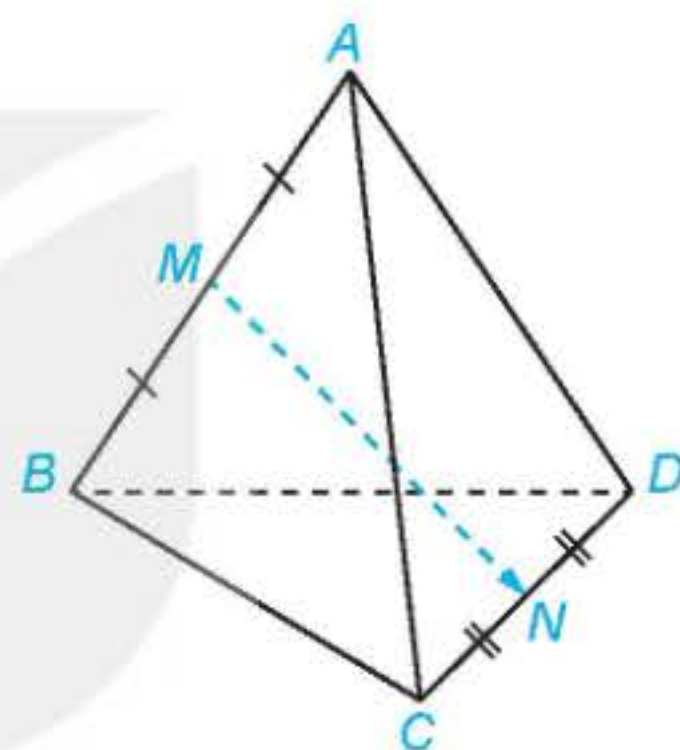
Do đó $2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN})$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$.

Suy ra $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

b) Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Vì vậy, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

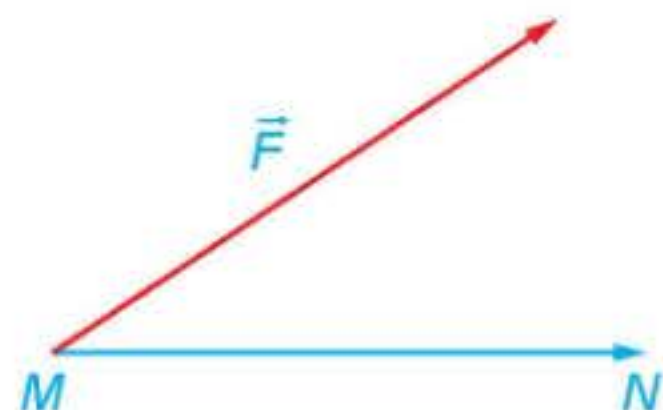


Hình 2.27

» **Luyện tập 11.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0$.

» **Vận dụng 4.** Như đã biết, nếu có một lực $\vec{F}$ tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường MN thì công A sinh ra được tính theo công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$, trong đó lực F có độ lớn tính bằng Newton, quãng đường MN tính bằng mét và công A tính bằng Jun (H.2.28). Do đó, nếu dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn không đổi để làm một vật di chuyển một quãng đường không đổi thì công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Hãy giải thích vì sao.

Kết quả trên có thể được áp dụng như thế nào khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng?



Hình 2.28

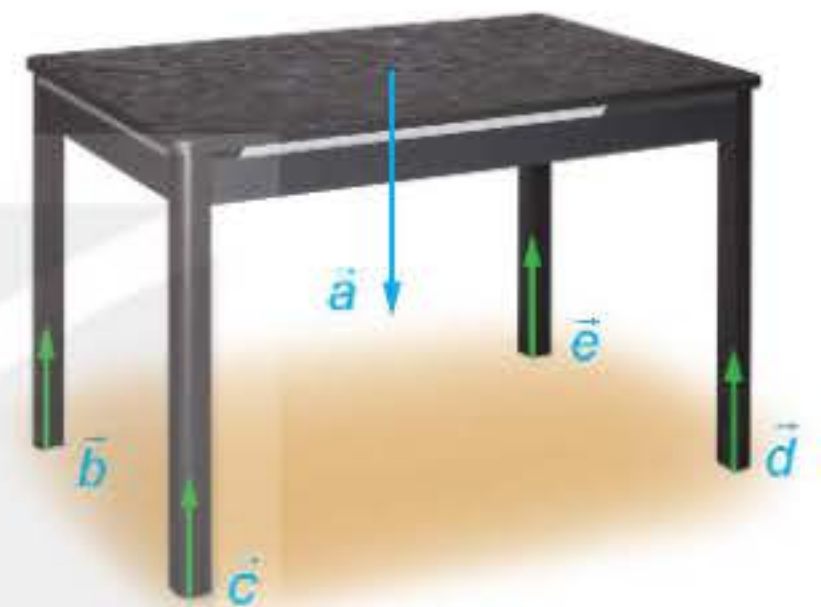
BÀI TẬP

2.1. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ phân biệt và đều khác $\vec{0}$. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

- a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
- b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
- c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
- d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

2.2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 3$ và $AA' = 4$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BD'}$.

2.3. Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vectơ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$).



Hình 2.29

- a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ và $\vec{e}$.
- b) Giải thích vì sao các vectơ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ đôi một bằng nhau.

2.4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CC'}$;
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD'} - \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$;
- c) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'C}$.

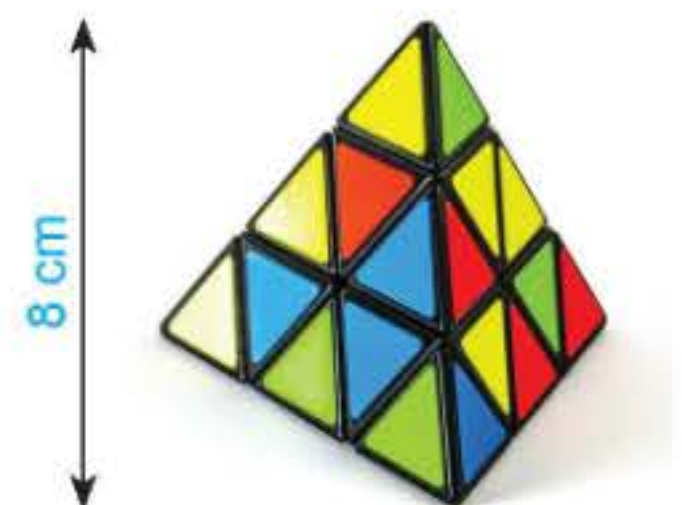
2.5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn các vectơ sau qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

- a) $\overrightarrow{AB'}$;
- b) $\overrightarrow{B'C'}$;
- c) $\overrightarrow{BC'}$.

2.6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

2.7. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA , lấy điểm M sao cho $SM = 2AM$. Trên cạnh BC , lấy điểm N sao cho $CN = 2BN$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB}$.

2.8. Trong Luyện tập 8, ta đã biết trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là một điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD . Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm (H.2.30).



Hình 2.30

2.9. Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.31

2.10. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2. Hãy tính góc giữa các cặp vector sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vector đó:

- a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$; b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$.

2.11. Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vector đó là 45° , hãy tính:

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$; c) $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

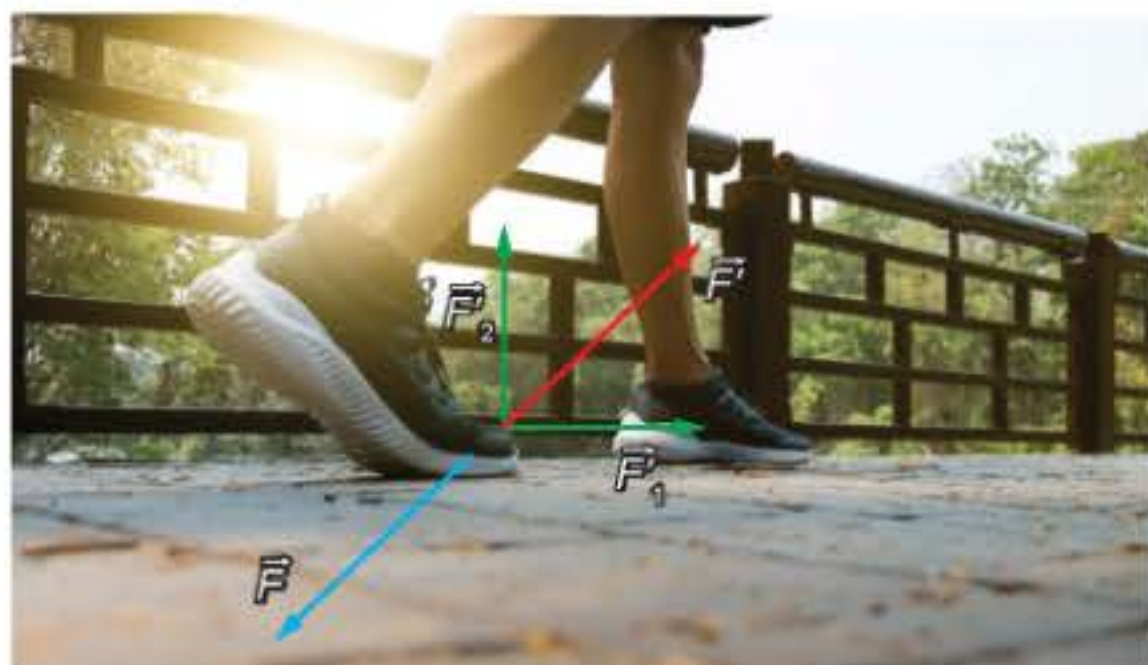
2.12. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$;
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Em có biết?

Việc phân tích (hay biểu diễn) một vector trong không gian qua các vector cho trước có thể giúp giải thích một số hiện tượng trong cuộc sống. Ví dụ, khi đi bộ, chân tạo một lực tác động $\vec{F}$ lên mặt đất. Theo Định luật III Newton, từ mặt đất có một phản lực tác động ngược trở lại bàn chân là $\vec{F}' = -\vec{F}$. Lực $\vec{F}'$ có thể được phân tích thành $\vec{F}' = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2$, ở đó $\vec{F}'_1$ có giá song song với mặt đất và $\vec{F}'_2$ có giá vuông góc với mặt đất (H.2.32). Vì vậy, chỉ có lực $\vec{F}'_1$ tạo nên chuyển động tiến về phía trước của người đi bộ. Có thể nhận thấy rằng nếu độ lớn của lực $\vec{F}$ là không đổi (và khi đó độ lớn của lực $\vec{F}'$ là không đổi) thì độ lớn của lực $\vec{F}'_1$ càng lớn nếu giá của lực $\vec{F}$ càng “gần” vị trí song song với mặt đất, tức là góc giữa giá của lực $\vec{F}$ và mặt đất càng nhỏ.

Nhận xét trên lí giải vì sao trong các cuộc thi điền kinh, khi chuẩn bị xuất phát, các vận động viên thường dùng bàn đạp (nếu được cho phép) để căng chân phát lực tạo với mặt đất góc nhỏ nhất, từ đó tạo được tốc độ xuất phát lớn nhất (H.2.33).



Hình 2.32



Hình 2.33