

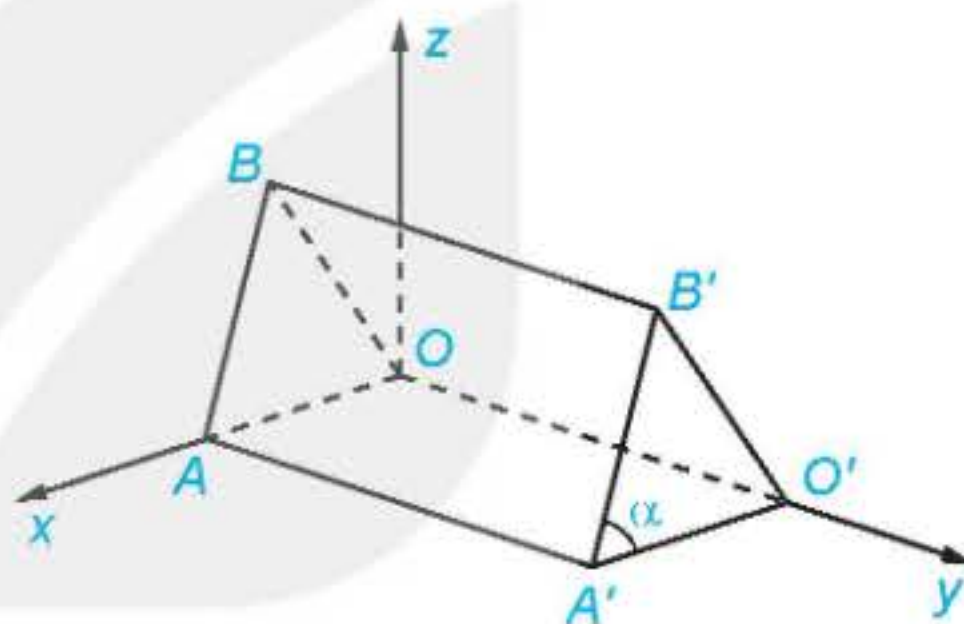
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ trong không gian, thể hiện các phép toán vectơ theo toạ độ, xác định độ dài của một vectơ khi biết toạ độ hai đầu mút.
- Vận dụng biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

Những căn nhà gỗ trong Hình 2.47a được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình 2.47b. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ thể hiện như Hình 2.47b (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có toạ độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Từ những thông tin trên, có thể tính được kích thước mỗi chiều của những căn nhà gỗ hay không?



a)



b)

Hình 2.47

1. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

HỎI 1. Hình thành biểu thức toạ độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ trong không gian

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 0; 5)$ và $\vec{b} = (1; 3; 9)$.

- Biểu diễn hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ qua các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- Biểu diễn hai vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ và $2\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, từ đó xác định toạ độ của hai vectơ đó.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z')$;
- $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z')$;
- $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$ với k là một số thực.



Nếu toạ độ của vectơ $\vec{a}$ là $(x; y; z)$ thì toạ độ của vectơ đối của $\vec{a}$ là gì?

Nhận xét. Vector $\vec{a} = (x; y; z)$ cùng phương với vector $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại

$$\text{số thực } k \text{ sao cho } \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz'. \end{cases}$$

» **Ví dụ 1.** Trong không gian Oxyz, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 5)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Tìm toạ độ của mỗi vector sau:

- a) $\vec{a} - \vec{b}$; b) $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Giải

a) Vì $\vec{a} = (2; 1; 5)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$ nên $\vec{a} - \vec{b} = (2 - 2; 1 - 2; 5 - 1) = (0; -1; 4)$.

b) Ta có $3\vec{a} = (3 \cdot 2; 3 \cdot 1; 3 \cdot 5) = (6; 3; 15)$ và $2\vec{b} = (2 \cdot 2; 2 \cdot 2; 2 \cdot 1) = (4; 4; 2)$.

Do đó $3\vec{a} + 2\vec{b} = (6 + 4; 3 + 4; 15 + 2) = (10; 7; 17)$.

» **Luyện tập 1.** Trong không gian Oxyz, cho ba vector $\vec{u} = (1; 8; 6)$, $\vec{v} = (-1; 3; -2)$ và $\vec{w} = (0; 5; 4)$. Tìm toạ độ của vector $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$.

» **HĐ2.** Thiết lập toạ độ trung điểm đoạn thẳng, toạ độ trọng tâm tam giác

Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$.

- a) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tìm toạ độ của M theo toạ độ của A và B.
b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm toạ độ của G theo toạ độ của A, B và C.

Ta đã biết:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB});$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Trong không gian Oxyz, cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$. Khi đó:

– Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$;

– Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

» **Ví dụ 2.** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 2; 1)$ và $C(2; -1; 5)$. Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên toạ độ của điểm M là $\left(\frac{1+3}{2}; \frac{2+2}{2}; \frac{3+1}{2}\right)$, suy ra $M(2; 2; 2)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên toạ độ của điểm G là $\left(\frac{1+3+2}{3}; \frac{2+2+(-1)}{3}; \frac{3+1+5}{3}\right)$, suy ra $G(2; 1; 3)$.

» **Luyện tập 2.** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2; 9; -1)$, $B(9; 4; 5)$ và $G(3; 0; 4)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC nhận G là trọng tâm.

2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

» **H03.** Thiết lập biểu thức tọa độ của tích vô hướng trong không gian

Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$.

- Giải thích vì sao $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$.
- Sử dụng biểu diễn $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ để tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{i}$, $\vec{a} \cdot \vec{j}$ và $\vec{a} \cdot \vec{k}$.
- Sử dụng biểu diễn $\vec{b} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ để tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Trong không gian Oxyz, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'.$$

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau nếu và chỉ nếu $xx' + yy' + zz' = 0$.
- Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

» **Ví dụ 3.** Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 4; 2)$ và $\vec{b} = (-4; 1; 0)$.

- Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và cho biết hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có vuông góc với nhau hay không.
- Tính độ dài của vectơ $\vec{a}$.

Giải

- Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$. Do đó, hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.
- Độ dài của vectơ $\vec{a}$ là $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$.

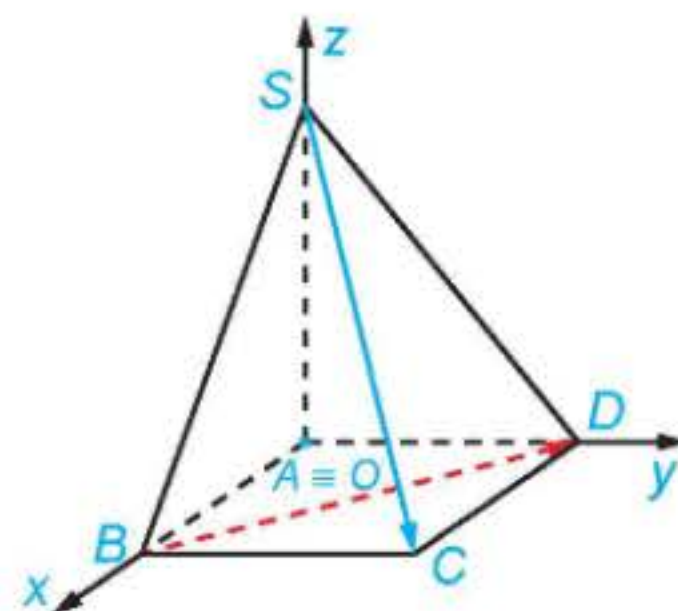
» **Luyện tập 3.** Trong Ví dụ 3, tính $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

» **Ví dụ 4.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Giả sử $SA = 2$, $AB = 3$, $AD = 4$. Xét hệ tọa độ Oxyz với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS (H.2.48).

- Xác định tọa độ của các điểm S, A, B, C, D.
- Tính BD và SC.
- Tính $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC})$.

Giải

- Vì A trùng gốc tọa độ nên $A(0; 0; 0)$. Vì B thuộc tia Ox và $AB = 3$ nên $B(3; 0; 0)$. Vì D thuộc tia Oy và $AD = 4$ nên $D(0; 4; 0)$. Vì S thuộc tia Oz và $AS = 2$ nên $S(0; 0; 2)$. Vì hình chiếu của C lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là B, D, A nên $C(3; 4; 0)$.



Hình 2.48

b) Ta có $\overrightarrow{BD} = (0 - 3; 4 - 0; 0 - 0) = (-3; 4; 0)$, suy ra $BD = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = 5$.

Ta có $\overrightarrow{SC} = (3 - 0; 4 - 0; 0 - 2) = (3; 4; -2)$, suy ra $SC = |\overrightarrow{SC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$.

c) Ta có $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}) = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{SC}|} = \frac{(-3) \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot (-2)}{5\sqrt{29}} = \frac{7}{5\sqrt{29}}$, suy ra $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}) \approx 74,9^\circ$.

Chú ý. Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

» **Luyện tập 4.** Trong không gian Oxyz, cho $A(0; 2; 1)$, $B(3; -2; 1)$ và $C(-2; 5; 7)$.

a) Tính chu vi của tam giác ABC.

b) Tính $\widehat{BAC}$.

3. VẬN DỤNG TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

» **Ví dụ 5.** Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?



Hình 2.49

Giải (H.2.49)

Gọi $C(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{940 - 800}{2}; \frac{550 - 500}{2}; \frac{8 - 7}{2} \right) = (70; 25; 0,5).$$

$$\text{Mặt khác, } \overrightarrow{BC} = (x - 940; y - 550; z - 8) \text{ nên } \begin{cases} x - 940 = 70 \\ y - 550 = 25 \\ z - 8 = 0,5. \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} x = 1\,010 \\ y = 575 \\ z = 8,5 \end{cases} \text{ và vì vậy } C(1\,010; 575; 8,5).$$

Vậy toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1\,010; 575; 8,5)$.

» **Luyện tập 5.** Với các giả thiết như trong Ví dụ 5, hãy xác định tọa độ của chiếc máy bay sau 10 phút tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B).

» **Ví dụ 6.** Hãy trả lời câu hỏi trong tình huống mở đầu.

Giải. Vì điểm A' có tọa độ là $(240; 450; 0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox , Oy lần lượt là 450 cm và 240 cm. Suy ra $A'A = 450$ cm và $A'O' = 240$ cm. Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{A'B'} = (-120; 0; 300)$, do đó $A'B' = |\overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{(-120)^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323$ (cm).

Vì $O'O = A'A = 450$ cm và O' nằm trên trục Oy nên tọa độ của điểm O' là $(0; 450; 0)$.

Do đó $\overrightarrow{O'B'} = (120; 0; 300)$ và $O'B' = |\overrightarrow{O'B'}| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323$ (cm).

Vậy mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là 450 cm, chiều rộng là 240 cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là 323 cm.

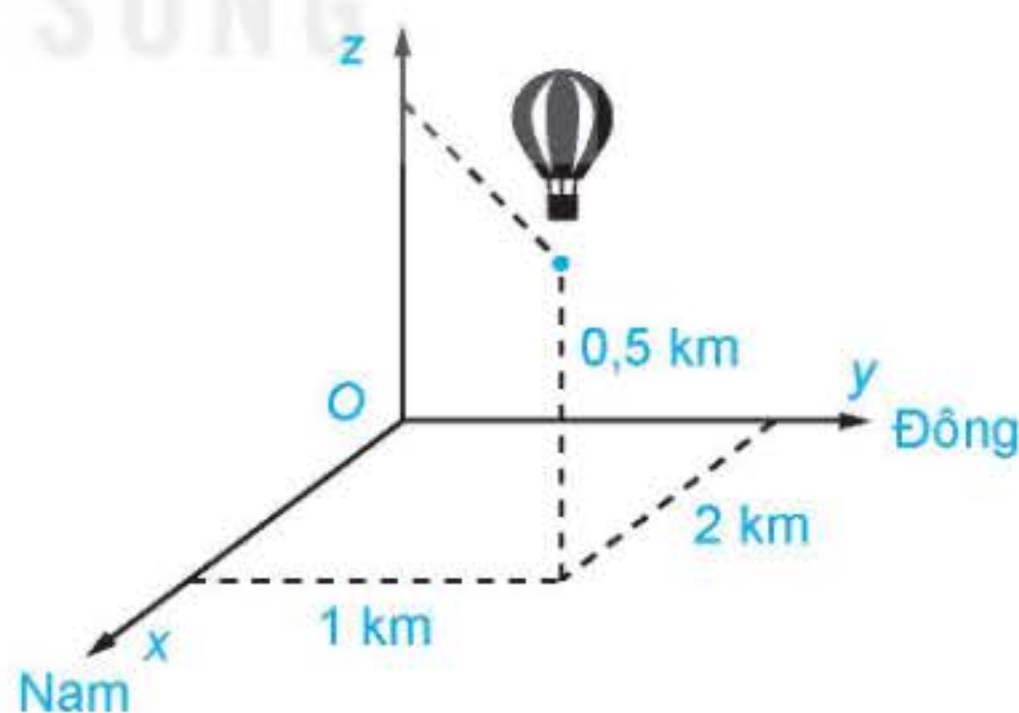
Góc α chính là góc giữa mặt bên của căn nhà gỗ và mặt đất.

» **Luyện tập 6.** Trong tình huống mở đầu, hãy tính độ lớn của góc α .

» **Ví dụ 7.** Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.50), đơn vị đo lấy theo kilômét.

- Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.50

Giải

- Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai có tọa độ lần lượt là $(2; 1; 0,5)$ và $(-1; -1,5; 0,8)$.
- Khoảng cách giữa hai chiếc khinh khí cầu là

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (-1,5-1)^2 + (0,8-0,5)^2} = \sqrt{15,34} \approx 3,92 \text{ (km)}.$$

» **Luyện tập 7.** Trong Ví dụ 7, kinh khí cầu thứ nhất hay thứ hai ở xa điểm xuất phát hơn? Giải thích vì sao.

BÀI TẬP

2.20. Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a} = (3; 1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 0; 4)$ và $\vec{c} = (6; -1; 0)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và $2\vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot (-\vec{b})$ và $(2\vec{a}) \cdot \vec{c}$.

2.21. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $M(-4; 3; 3)$, $N(4; -4; 2)$ và $P(3; 6; -1)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, từ đó chứng minh rằng ba điểm M , N , P không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP}$, từ đó suy ra tọa độ của điểm Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

c) Tính chu vi của hình bình hành $MNPQ$.

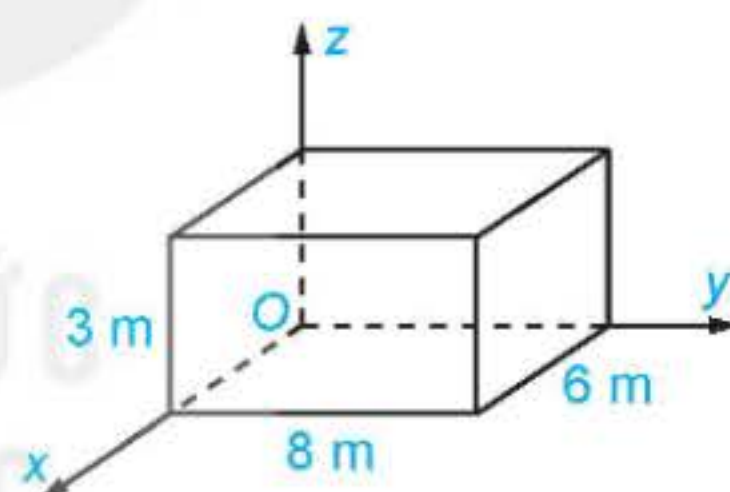
2.22. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 1)$, $B(0; -3; 1)$ và $C(4; -1; 4)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .

b) Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

c) Tính $\widehat{ABC}$.

2.23. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (H.2.51). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



Hình 2.51

2.24. Trong không gian, xét hệ tọa độ Oxyz có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.52). Đơn vị đo trong không gian Oxyz lấy theo kilômét. Một chiếc radar đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km. Hỏi radar có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là $(25; 15; -10)$ đối với hệ tọa độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.52