

## CHƯƠNG V

# PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Nối tiếp ý tưởng phương pháp tọa độ trong mặt phẳng ở lớp 10, trong chương này, thông qua hệ trục tọa độ, ta sẽ thể hiện mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu theo ngôn ngữ của đại số.



### Bài 14

## PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

### THUẬT NGỮ

- Vector pháp tuyến của mặt phẳng
- Cặp vector chỉ phương của mặt phẳng
- Phương trình tổng quát của mặt phẳng
- Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

### KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

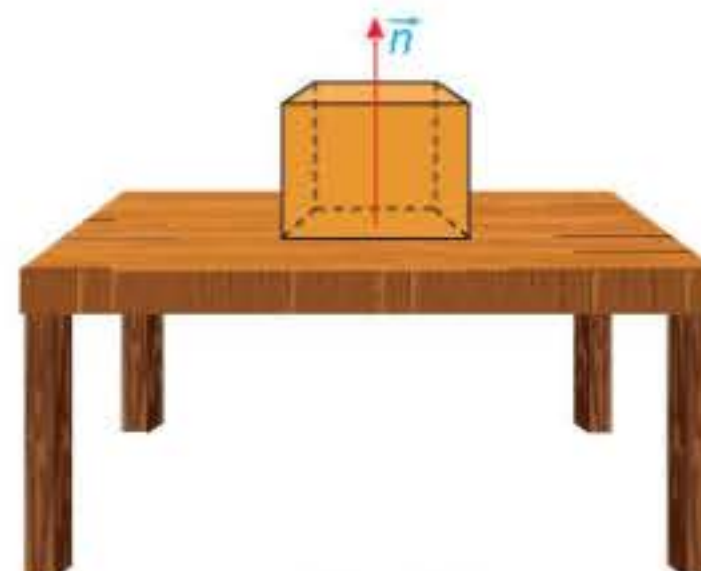
- Nhận biết phương trình mặt phẳng.
- Viết phương trình mặt phẳng trong các trường hợp: qua một điểm và biết vector pháp tuyến, qua một điểm và biết cặp vector chỉ phương, qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nhận biết hai mặt phẳng song song, hai mặt phẳng vuông góc.
- Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.
- Vận dụng kiến thức về phương trình mặt phẳng, công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng vào một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Một vật thể chuyển động trong không gian  $Oxyz$ . Tại mỗi thời điểm  $t$ , vật thể ở vị trí  $M(\cos t - \sin t; \cos t + \sin t; \cos t)$ . Hỏi vật thể có chuyển động trong một mặt phẳng cố định hay không?

### 1. VECTƠ PHÁP TUYẾN VÀ CẶP VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẪNG

#### » H.5.1. Hình thành khái niệm vector pháp tuyến

Khi một vật được đặt trên mặt bàn phẳng, mặt bàn sẽ tác động lên vật một phản lực pháp tuyến  $\vec{n}$ , giá của vector  $\vec{n}$  vuông góc với mặt bàn. Nếu mặt bàn thuộc mặt phẳng nằm ngang thì  $\vec{n}$  có phương gì? (H.5.1)

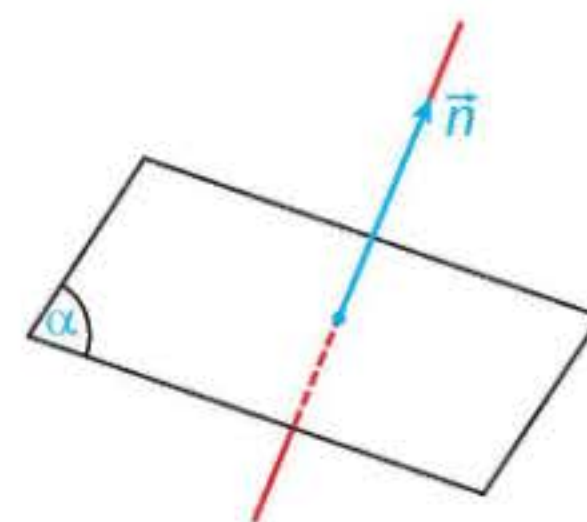


Hình 5.1

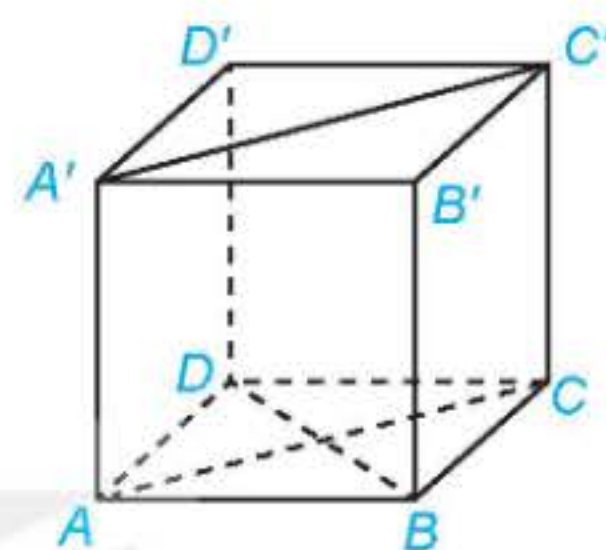
Vector  $\vec{n} \neq \vec{0}$  được gọi là **vector pháp tuyến** của mặt phẳng  $(\alpha)$  nếu giá của  $\vec{n}$  vuông góc với  $(\alpha)$ .

### Chú ý

- Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một vector pháp tuyến của nó.
- Nếu  $\vec{n}$  là một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  thì  $k\vec{n}$  (với  $k$  là một số khác 0) cũng là một vector pháp tuyến của  $(\alpha)$ .



Hình 5.2



Hình 5.3

» **Ví dụ 1.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  (H.5.3).

Trong các khẳng định sau, những khẳng định nào là đúng?

- $\overrightarrow{AA'}$  và  $2\overrightarrow{BB'}$  đều là vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(ABCD)$ .
- $\overrightarrow{BD}$  là một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(ACC'A')$ .
- $\overrightarrow{A'C'}$  là một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(ABCD)$ .

### Giải

Vì các đường thẳng  $AA'$ ,  $BB'$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  nên  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $2\overrightarrow{BB'}$  đều là vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(ABCD)$ .

Đường thẳng  $BD$  vuông góc với hai đường thẳng  $AC$  và  $AA'$  nên vuông góc với mặt phẳng  $(ACC'A')$ . Vậy  $\overrightarrow{BD}$  là một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(ACC'A')$ .

Đường thẳng  $A'C'$  không vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  nên vector  $\overrightarrow{A'C'}$  không phải là vector pháp tuyến của mặt phẳng đó.

Vậy các khẳng định a và b là đúng, khẳng định c là sai.

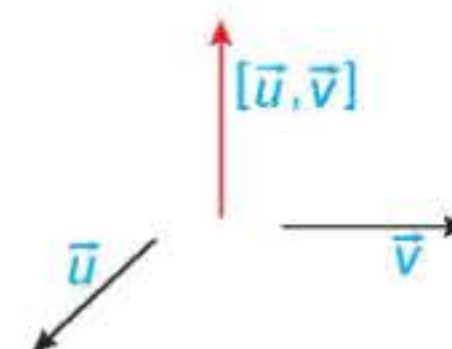
» **Luyện tập 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(-3; 0; 1)$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AB$ . Hãy chỉ ra một vector pháp tuyến của  $(\alpha)$ .

» **H02.** Tìm một vector vuông góc với hai vector cho trước

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{u} = (a; b; c)$  và  $\vec{v} = (a'; b'; c')$ .

- Vector  $\vec{n} = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$  có vuông góc với cả hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  hay không?
- $\vec{n} = \vec{0}$  khi và chỉ khi  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  có mối quan hệ gì?

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{u} = (a; b; c)$  và  $\vec{v} = (a'; b'; c')$ . Khi đó vector  $\vec{n} = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$  vuông góc với cả hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ , được gọi là **tích có hướng** của  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ , kí hiệu là  $[\vec{u}, \vec{v}]$ .



Hình 5.4

### Chú ý

- $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$  khi và chỉ khi  $\vec{u}, \vec{v}$  cùng phương.
- Với bốn số  $x, y, x', y'$ , ta kí hiệu  $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$ . Khi đó tích có hướng của  $\vec{u} = (a; b; c)$  và  $\vec{v} = (a'; b'; c')$  là

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left( \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right).$$

» **Ví dụ 2.** Trong không gian Oxyz, cho  $\vec{u} = (1; -2; 0)$  và  $\vec{v} = (3; 1; -4)$ . Tính  $[\vec{u}, \vec{v}]$ .

**Giải**

$$\text{Ta có } [\vec{u}, \vec{v}] = \left( \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (8; 4; 7).$$

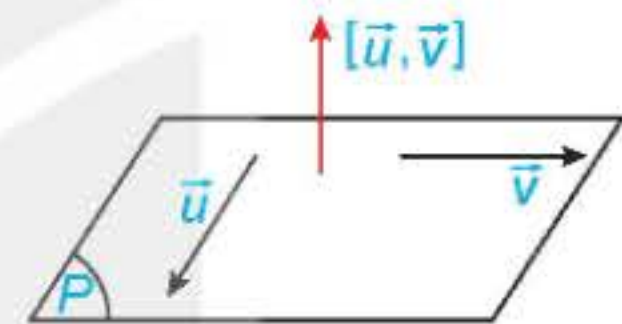
» **Luyện tập 2.** Trong không gian Oxyz, cho  $\vec{u} = (2; 3; 1)$  và  $\vec{v} = (4; 6; 2)$ . Tính  $[\vec{u}, \vec{v}]$ .

» **H03. Hình thành khái niệm cặp vector chỉ phương của mặt phẳng**

Trong không gian Oxyz, cho hai vector  $\vec{u}, \vec{v}$  không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng  $(P)$ .

- Vector  $[\vec{u}, \vec{v}]$  có khác vector-không và giá của nó có vuông góc với cả hai giá của  $\vec{u}, \vec{v}$  hay không?
- Mặt phẳng  $(P)$  có nhận  $[\vec{u}, \vec{v}]$  làm một vector pháp tuyến hay không?

- Trong không gian Oxyz, hai vector  $\vec{u}, \vec{v}$  được gọi là **cặp vector chỉ phương** của mặt phẳng  $(P)$  nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng  $(P)$ .
- Nếu  $\vec{u}, \vec{v}$  là cặp vector chỉ phương của  $(P)$  thì  $[\vec{u}, \vec{v}]$  là một vector pháp tuyến của  $(P)$ .



Hình 5.5

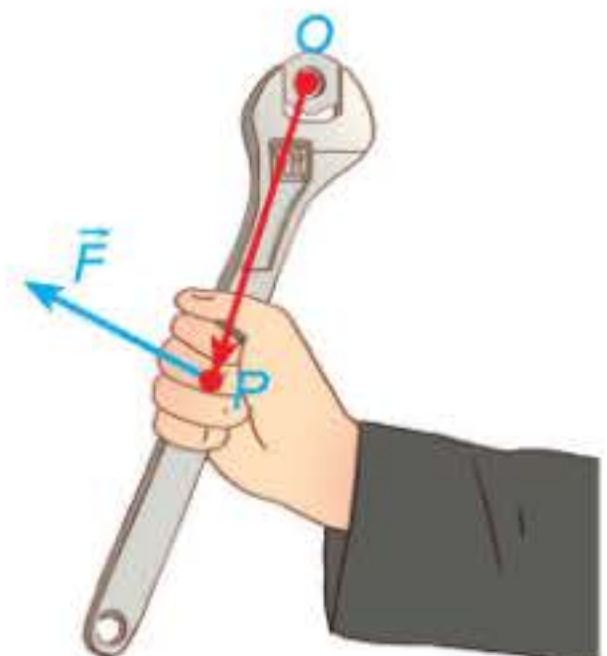
» **Ví dụ 3.** Trong không gian Oxyz, cho các vector  $\vec{u} = (2; -1; 0)$ ,  $\vec{v} = (1; -1; 2)$ . Gọi  $(\alpha)$  là một mặt phẳng song song với các giá của  $\vec{u}, \vec{v}$ . Hãy tìm một vector pháp tuyến của  $(\alpha)$ .

**Giải**

$$\text{Ta có } \vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = \left( \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2; -4; -1) \neq \vec{0}. \text{ Do đó } \vec{u}, \vec{v} \text{ là cặp vector chỉ phương và } \vec{n} \text{ là một vector pháp tuyến của } (\alpha).$$

» **Luyện tập 3.** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm không thẳng hàng  $A(1; -2; 1)$ ,  $B(-2; 1; 0)$ ,  $C(-2; 3; 2)$ . Hãy chỉ ra một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(ABC)$ .

» **Vận dụng 1.** Moment lực là một đại lượng Vật lí, thể hiện tác động gây ra sự quay quanh một điểm hoặc một trục của một vật thể. Trong không gian Oxyz, với đơn vị đo độ dài là mét, nếu tác động vào cán mỏ lết tại vị trí  $P$  một lực  $\vec{F}$  để vận con ốc ở vị trí  $O$  (H.5.6) thì moment lực  $\vec{M}$  được tính bởi công thức  $\vec{M} = [\vec{OP}, \vec{F}]$ .



Hình 5.6

- Cho  $\vec{OP} = (x; y; z)$ ,  $\vec{F} = (a; b; c)$ . Tính  $\vec{M}$ .
- Giải thích vì sao, nếu giữ nguyên lực tác động  $\vec{F}$  trong khi thay vị trí đặt lực từ  $P$  sang  $P'$  sao cho  $\vec{OP'} = 2\vec{OP}$  thì moment lực sẽ tăng lên gấp đôi. Từ đó, ta có thể rút ra điều gì để đỡ tốn sức khi dùng mỏ lết vặn ốc?

## 2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

### » H04. Hình thành khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng  $(\alpha)$ . Gọi  $\vec{n} = (A; B; C)$  là một vector pháp tuyến của  $(\alpha)$  và  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  là một điểm thuộc  $(\alpha)$ .

- Một điểm  $M(x; y; z)$  thuộc  $(\alpha)$  khi và chỉ khi hai vector  $\vec{n}$  và  $\overrightarrow{M_0M}$  có mối quan hệ gì?
- Điểm  $M(x; y; z)$  thuộc  $(\alpha)$  khi và chỉ khi toạ độ của nó thoả mãn hệ thức nào?

Trong không gian Oxyz, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng  $Ax + By + Cz + D = 0$ , trong đó  $A, B, C$  không đồng thời bằng 0, được gọi là **phương trình tổng quát** của mặt phẳng đó.

**Chú ý.** Trong không gian Oxyz, mỗi phương trình  $Ax + By + Cz + D = 0$  (các hệ số  $A, B, C$  không đồng thời bằng 0) xác định một mặt phẳng nhận  $\vec{n} = (A; B; C)$  làm một vector pháp tuyến.

### » Ví dụ 4. Trong không gian Oxyz, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

- $x + 2y - 3z^2 + 1 = 0$ ;
- $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} + 2 = 0$ ;
- $y + 1 = 0$ .

**Giải**

Trong các phương trình trên, chỉ có phương trình  $y + 1 = 0$  có dạng  $Ax + By + Cz + D = 0$  và thoả mãn  $A, B, C$  không đồng thời bằng 0 ( $A = 0, B = 1, C = 0$ ). Vì vậy, trong các phương trình trên, chỉ có phương trình  $y + 1 = 0$  là phương trình mặt phẳng.

### » Luyện tập 4. Trong không gian Oxyz, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

- $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$ ;
- $\frac{x}{2} - y + \frac{z}{3} + 5 = 0$ ;
- $xy + 5 = 0$ .

### » Ví dụ 5. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha) : x + 2y - z + 1 = 0$ .

- Hãy chỉ ra một vector pháp tuyến của  $(\alpha)$ .
- Vector  $\vec{m} = (2; 4; -2)$  có là vector pháp tuyến của  $(\alpha)$  hay không?
- Trong hai điểm  $A(1; 3; 2), B(1; 1; 4)$ , điểm nào thuộc mặt phẳng  $(\alpha)$ ?

**Giải**

- Mặt phẳng  $(\alpha)$  nhận  $\vec{n} = (1; 2; -1)$  làm một vector pháp tuyến.
- Do  $\vec{m} = 2\vec{n}$  mà  $\vec{n}$  là vector pháp tuyến của  $(\alpha)$  nên  $\vec{m}$  cũng là vector pháp tuyến của  $(\alpha)$ .
- Ta cần kiểm tra xem trong hai điểm  $A(1; 3; 2), B(1; 1; 4)$ , điểm nào có toạ độ thoả mãn phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$ .

Do  $1 + 2 \cdot 3 - 2 + 1 \neq 0$  và  $1 + 2 \cdot 1 - 4 + 1 = 0$  nên trong hai điểm  $A, B$  chỉ có toạ độ điểm  $B$  thoả mãn phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$ . Vậy điểm  $B$  thuộc mặt phẳng  $(\alpha)$ , điểm  $A$  không thuộc mặt phẳng  $(\alpha)$ .

» **Luyện tập 5.** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng  $(\alpha) : x + 2 = 0$ .

- Điểm  $A(-2; 1; 0)$  có thuộc  $(\alpha)$  hay không?
- Hãy chỉ ra một vector pháp tuyến của  $(\alpha)$ .

### 3. LẬP PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

» **HĐ5.** Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết vector pháp tuyến

Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có vector pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B; C)$ .

Dựa vào HĐ4, hãy nêu phương trình của  $(\alpha)$ .

Trong không gian Oxyz, nếu mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có vector pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B; C)$  thì có phương trình là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0, \text{ với } D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

» **Ví dụ 6.** Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(2; -1; 0)$  và có vector pháp tuyến  $\vec{n} = (3; -4; 6)$ .

**Giải**

Mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình là:

$$3(x - 2) - 4[y - (-1)] + 6(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 6z - 10 = 0.$$

» **Luyện tập 6.** Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(1; 2; -4)$  và vuông góc với trục Oz.

» **HĐ6.** Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp vector chỉ phương

Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và biết cặp vector chỉ phương  $\vec{u} = (a; b; c)$ ,  $\vec{v} = (a'; b'; c')$ .

- Hãy chỉ ra một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$ .
- Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$ .

Trong không gian Oxyz, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm  $M$  và biết cặp vector chỉ phương  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  có thể thực hiện theo các bước sau:

- Tìm vector pháp tuyến  $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ .
- Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua  $M$  và biết vector pháp tuyến  $\vec{n}$ .

» **Ví dụ 7.** Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  với  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(4; 3; 5)$ ,  $C(2; 3; 2)$ ,  $A'(1; 1; 1)$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(A'B'C')$ .

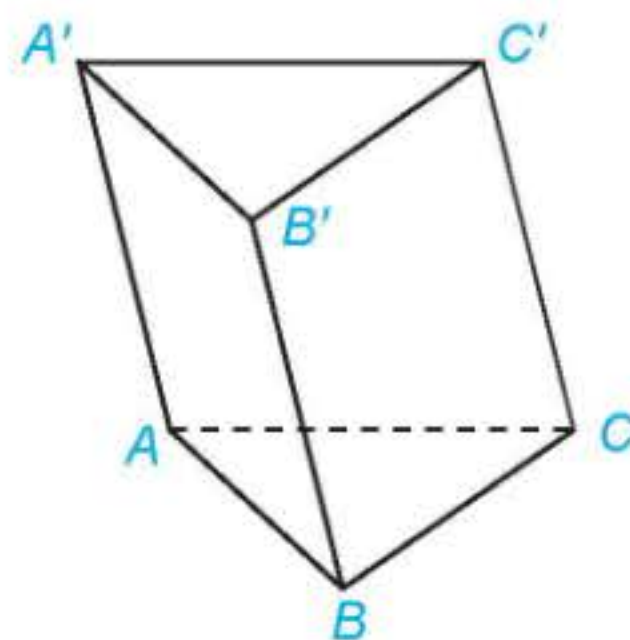
**Giải (H.5.7)**

Mặt phẳng  $(A'B'C')$  nhận  $\overrightarrow{AB} = (3; 1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; 1; -1)$  làm cặp vector chỉ phương nên có vector pháp tuyến là

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-3; 5; 2).$$

Mặt phẳng  $(A'B'C')$  đi qua  $A'(1; 1; 1)$  và nhận  $\vec{n} = (-3; 5; 2)$  làm một vector pháp tuyến nên có phương trình:

$$-3(x - 1) + 5(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y - 2z + 4 = 0.$$



Hình 5.7

» **Luyện tập 7.** Trong không gian Oxyz, cho các điểm  $A(1; -2; -1), B(4; 1; 2), C(2; 3; 1)$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $A(1; -2; -1)$  đồng thời song song với trục Oy và đường thẳng BC.

» **H07. Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng**

Trong không gian Oxyz, cho ba điểm không thẳng hàng:

$$A(1; 2; 3), B(-1; 3; 4), C(2; -1; 2).$$

- Hãy chỉ ra một cặp vector chỉ phương của mặt phẳng  $(ABC)$ .
- Viết phương trình mặt phẳng  $(ABC)$ .

Trong không gian Oxyz, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng  $A, B, C$  có thể thực hiện theo các bước sau:

- Tìm cặp vector chỉ phương  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .
- Tìm vector pháp tuyến  $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ .
- Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua  $A$  và có vector pháp tuyến  $\vec{n}$ .

» **Ví dụ 8.** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm  $A(2; 1; -1), B(3; 2; 1), C(3; 1; 4)$ .

- Chứng minh rằng ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.
- Viết phương trình mặt phẳng  $(ABC)$ .

**Giải**

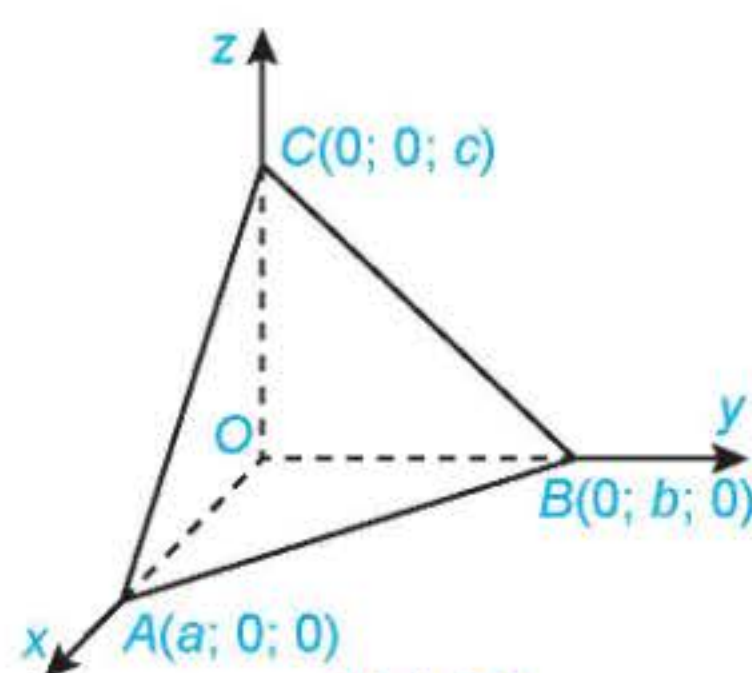
a) Hai vector  $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; 0; 5)$  không cùng phương nên ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Mặt phẳng  $(ABC)$  có cặp vector chỉ phương  $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; 0; 5)$  nên có vector pháp tuyến  $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; -3; -1)$ .

Mặt phẳng  $(ABC)$  đi qua  $A(2; 1; -1)$  và có vector pháp tuyến  $\vec{n} = (5; -3; -1)$  nên có phương trình:

$$5(x - 2) - 3(y - 1) - 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 5x - 3y - z - 8 = 0.$$

» **Luyện tập 8.** (H.5.8) Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng  $(\alpha)$  không đi qua gốc tọa độ và cắt ba trục Ox, Oy, Oz tương ứng tại các điểm  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$ ,  $C(0; 0; c)$  ( $a, b, c \neq 0$ ).



Hình 5.8

Chứng minh rằng mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

(Phương trình trên được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn).

» **Vận dụng 2.** Trong tình huống mở đầu, hãy thực hiện các bước sau và trả lời câu hỏi đã được nêu ra.

- Xác định tọa độ của vị trí  $M_1, M_2, M_3$  của vật tương ứng với các thời điểm  $t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi$ .
- Chứng minh rằng  $M_1, M_2, M_3$  không thẳng hàng và viết phương trình mặt phẳng  $(M_1M_2M_3)$ .
- Vị trí  $M(\cos t - \sin t; \cos t + \sin t; \cos t)$  có luôn thuộc mặt phẳng  $(M_1M_2M_3)$  hay không?

## 4. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

» **HĐ8.** Tìm điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau

Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng:

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0, (\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

với hai vector pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B; C)$ ,  $\vec{n}' = (A'; B'; C')$  tương ứng.

- Góc giữa hai mặt phẳng  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  và góc giữa hai giá của  $\vec{n}$ ,  $\vec{n}'$  có mối quan hệ gì?
- Hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi hai vector pháp tuyến tương ứng  $\vec{n}$ ,  $\vec{n}'$  có mối quan hệ gì?

Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng bất kì tương ứng vuông góc với hai mặt phẳng đó.

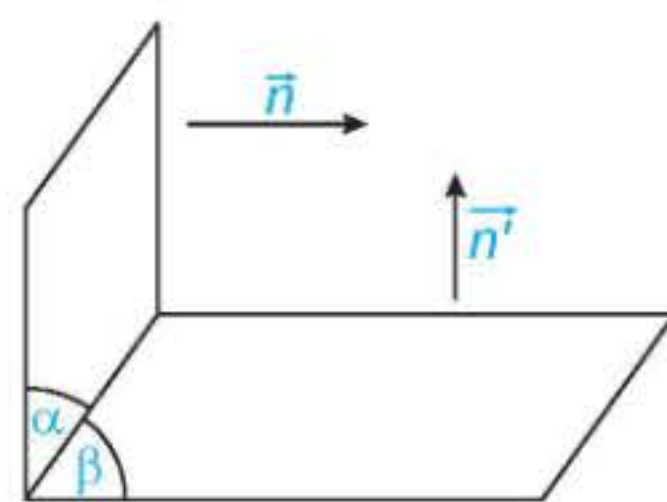


Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng:

$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ ,  $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ ,  
với hai vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B; C)$ ,  $\vec{n}' = (A'; B'; C')$   
tương ứng.

Khi đó:

$$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0.$$



Hình 5.9

**Chú ý.** Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì vectơ pháp tuyến của mặt phẳng này có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng kia.

» **Ví dụ 9.** Trong không gian Oxyz, chứng minh rằng hai mặt phẳng sau vuông góc với nhau:

$$(\alpha): x - 3y + 2z + 1 = 0, (\beta): 5x + y - z + 2 = 0.$$

**Giải**

Hai mặt phẳng  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  có vectơ pháp tuyến tương ứng là  $\vec{n} = (1; -3; 2)$ ,  $\vec{n}' = (5; 1; -1)$ .

Ta có  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0$  nên  $\vec{n} \perp \vec{n}'$ . Do đó  $(\alpha)$  vuông góc với  $(\beta)$ .

» **Luyện tập 9.** Trong không gian Oxyz, hai mặt phẳng sau đây có vuông góc với nhau hay không?

$$(\alpha): 3x + y - z + 1 = 0, (\beta): 9x + 3y - 3z + 3 = 0.$$

» **Ví dụ 10.** Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua hai điểm  $A(1; 2; -2)$ ,  $B(2; 4; 1)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(Q): x + 3y + z - 1 = 0$ .

**Giải**

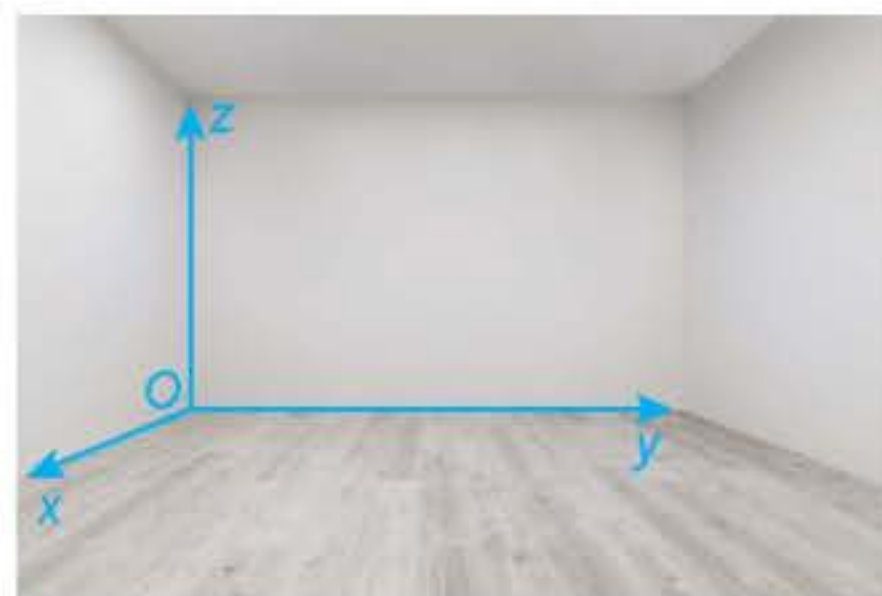
Mặt phẳng  $(Q)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_Q = (1; 3; 1)$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A, B$  và vuông góc với  $(Q)$  nên có cặp vectơ chỉ phương là  $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 3)$  và  $\vec{n}_Q = (1; 3; 1)$ . Do đó  $(P)$  có vectơ pháp tuyến là:  $\vec{n}_P = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_Q] = (-7; 2; 1)$ .

Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A(1; 2; -2)$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_P = (-7; 2; 1)$  nên có phương trình:  
 $-7x + 2y + z - [(-7) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)] = 0 \Leftrightarrow 7x - 2y - z - 5 = 0.$

» **Vận dụng 3.** (H.5.10) Trong không gian Oxyz, sàn của một căn phòng có dạng hình tứ giác với bốn đỉnh  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(2; 3; 0)$ ,  $C(0; 2\sqrt{2}; 0)$ . Bốn bức tường của căn phòng đều vuông góc với sàn.

a) Viết phương trình bốn mặt phẳng tương ứng chứa bốn bức tường đó.

b) Trong bốn mặt phẳng tương ứng chứa bốn bức tường đó, hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.



Hình 5.10

## 5. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẪNG SONG SONG VỚI NHAU

### » HĐ9. Tìm điều kiện để hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau

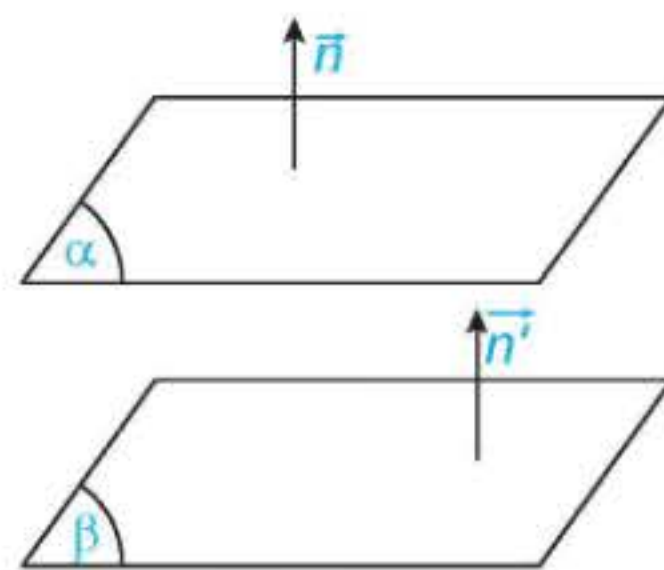
Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

với các vector pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B; C)$ ,  $\vec{n}' = (A'; B'; C')$  tương ứng.

Nếu hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song hoặc trùng nhau thì các vector pháp tuyến  $\vec{n}$ ,  $\vec{n}'$  có mối quan hệ gì?



Hình 5.11

Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0, (\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

với các vector pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B; C)$ ,  $\vec{n}' = (A'; B'; C')$  tương ứng. Khi đó:

$$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}' = k\vec{n} \\ D' \neq kD \end{cases} \text{ với } k \text{ nào đó.}$$

### Chú ý

- Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì vector pháp tuyến của mặt phẳng này cũng là vector pháp tuyến của mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  trùng nhau khi và chỉ khi tồn tại số  $k$  khác 0 sao cho

$$A' = kA, B' = kB, C' = kC, D' = kD.$$

### » Ví dụ 11. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng:

$$(\alpha): 3x - y + z + \sqrt{2} = 0 \text{ và } (\beta): 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{2}z + 1 = 0.$$

Hỏi  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  có song song với nhau hay không?

**Giải**

Các mặt phẳng trên có vector pháp tuyến tương ứng là  $\vec{n}_\alpha = (3; -1; 1)$ ,  $\vec{n}_\beta = (3\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .

Do  $\vec{n}_\beta = \sqrt{2} \cdot \vec{n}_\alpha$  và  $1 \neq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$  nên hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song với nhau.

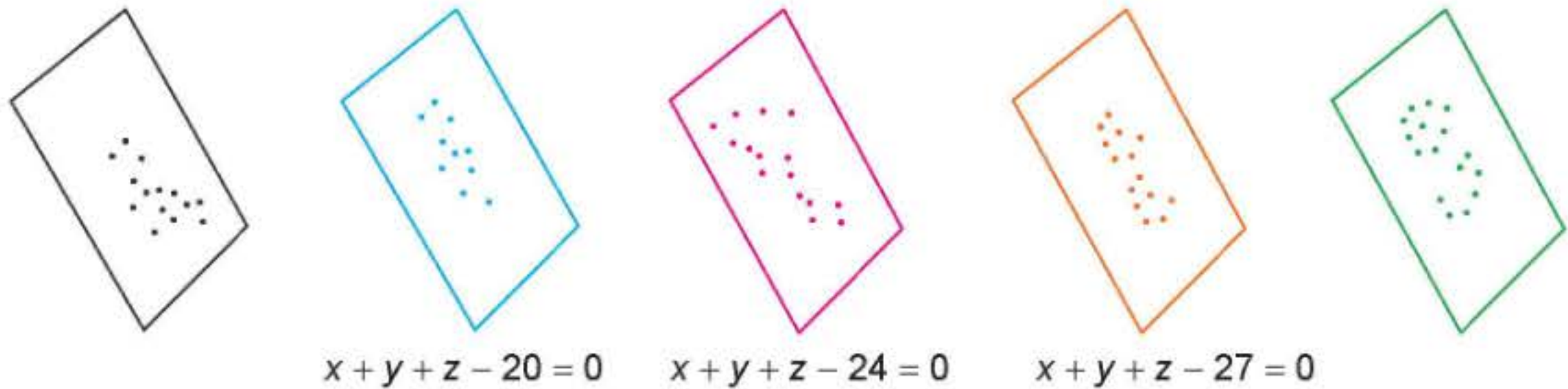
### » Luyện tập 10. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng:

$$(\alpha): 5x + 2y - 4z + 6 = 0 \text{ và } (\beta): 10x + 4y - 2z + 12 = 0.$$

- Hỏi  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  có song song với nhau hay không?
- Chứng minh rằng điểm  $M(1; -3; 5)$  không thuộc mặt phẳng  $(\alpha)$  nhưng thuộc mặt phẳng  $(\beta)$ .
- Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M(1; -3; 5)$  và song song với  $(\alpha)$ .

### » Vận dụng 4. Trong một kì thi tuyển sinh có ba môn thi Toán, Ngữ văn, Tiếng Anh. Trong không gian Oxyz, người ta biểu diễn kết quả thi của mỗi thí sinh bởi điểm có hoành độ, tung độ, cao độ tương ứng là điểm Toán, Ngữ văn, Tiếng Anh của thí sinh đó.

- a) Chứng minh rằng các điểm biểu diễn tương ứng với các thí sinh có tổng số điểm ba môn thi bằng 27 (nếu có) cùng thuộc mặt phẳng có phương trình  $x + y + z - 27 = 0$ .
- b) Chứng minh rằng tồn tại một số mặt phẳng đôi một song song với nhau sao cho hai điểm biểu diễn ứng với hai thí sinh có tổng số điểm thi bằng nhau thì cùng thuộc một mặt phẳng trong số các mặt phẳng đó.

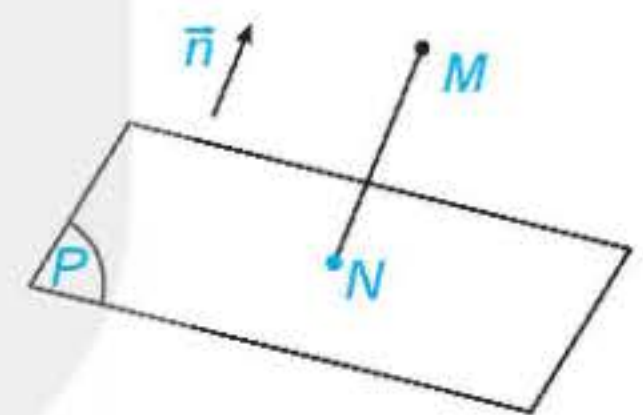


Hình 5.12

## 6. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

» **HĐ 10.** Thiết lập công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và mặt phẳng  $(P): Ax + By + Cz + D = 0$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B; C)$ . Gọi  $N$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $(P)$  (H.5.13).



Hình 5.13

- a) Giải thích vì sao tồn tại số  $k$  để  $\overrightarrow{MN} = k\vec{n}$ . Tính tọa độ của  $N$  theo  $k$ , tọa độ của  $M$  và các hệ số  $A, B, C, D$ .
- b) Thay tọa độ của  $N$  vào phương trình mặt phẳng  $(P)$  để từ đó tính  $k$  theo tọa độ của  $M$  và các hệ số  $A, B, C, D$ .
- c) Từ  $|\overrightarrow{MN}| = |k||\vec{n}|$ , hãy tính độ dài của đoạn thẳng  $MN$  theo tọa độ của  $M$  và các hệ số  $A, B, C, D$ . Từ đó suy ra công thức tính khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(P)$ .

Trong không gian  $Oxyz$ , khoảng cách từ điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  đến mặt phẳng  $(P): Ax + By + Cz + D = 0$  là:

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

» **Ví dụ 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , tính khoảng cách từ điểm  $M(1; 2; -1)$  đến mặt phẳng  $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$ .

**Giải**

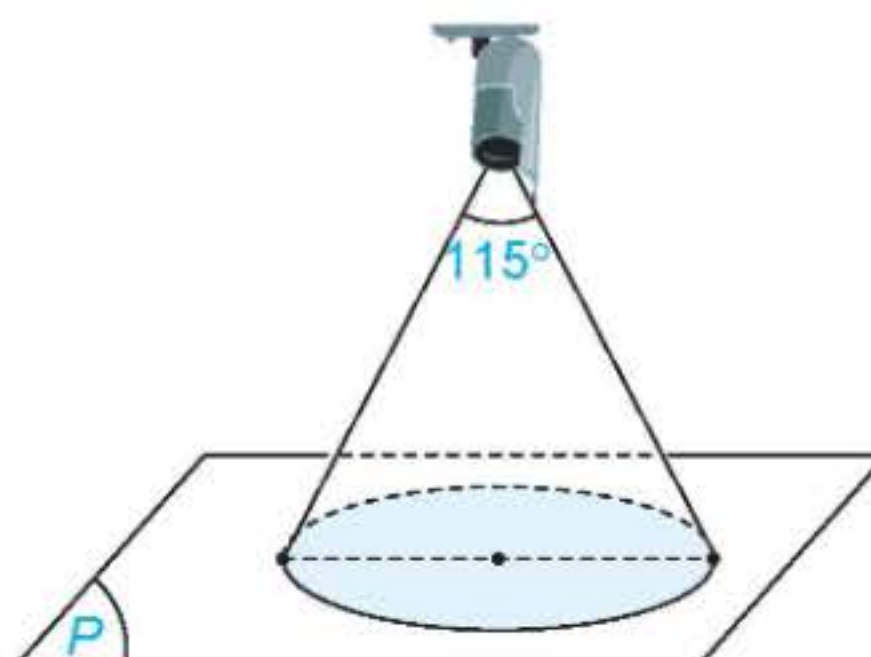
Khoảng cách từ điểm  $M(1; 2; -1)$  đến mặt phẳng  $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$  là:

$$d(M, (P)) = \frac{|1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 4.$$

» **Luyện tập 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P) : x + 3y + z + 2 = 0$  và  $(Q) : x + 3y + z + 5 = 0$ .

- Chứng minh rằng  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau.
- Lấy một điểm thuộc  $(P)$ , tính khoảng cách từ điểm đó đến  $(Q)$ . Từ đó tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .

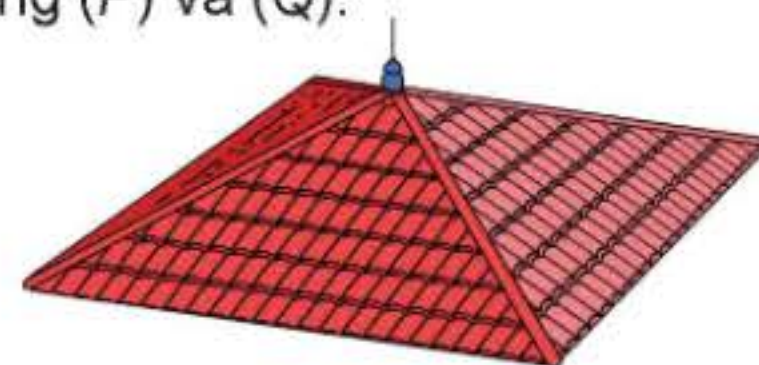
» **Vận dụng 5.** (H.5.14) Góc quan sát ngang của một camera là  $115^\circ$ . Trong không gian  $Oxyz$ , camera được đặt tại điểm  $C(1; 2; 4)$  và chiếu thẳng về phía mặt phẳng  $(P) : x + 2y + 2z + 3 = 0$ . Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng  $(P)$  của camera là hình tròn có bán kính bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.)



Hình 5.14

## BÀI TẬP

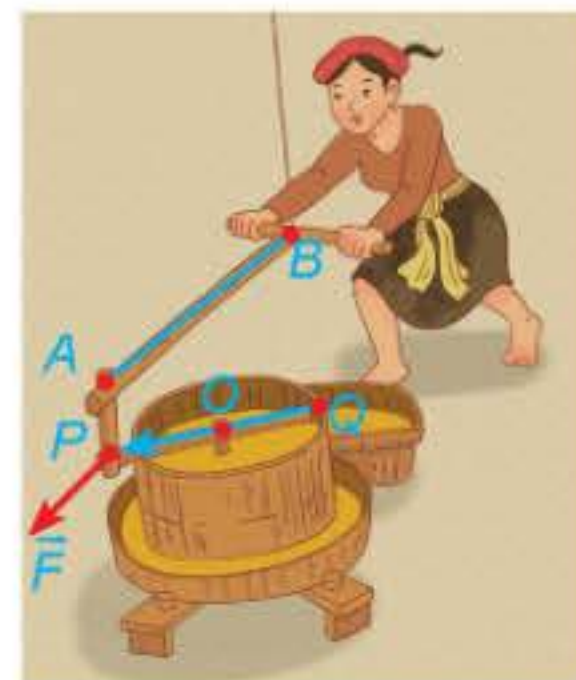
- Trong không gian  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm  $M(1; 2; -1)$  và vuông góc với trục  $Ox$ .
- Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , với  $A(1; -1; 3)$ ,  $B(0; 2; 4)$ ,  $D(2; -1; 1)$ ,  $A'(0; 1; 2)$ .
  - Tính tọa độ các điểm  $C$ ,  $B'$ ,  $D'$ .
  - Viết phương trình mặt phẳng  $(CB'D')$ .
- Trong không gian  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M(1; -1; 5)$  và vuông góc với hai mặt phẳng  $(Q) : 3x + 2y - z = 0$ ,  $(R) : x + y - z = 0$ .
- Trong không gian  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng đi qua  $M(2; 3; -1)$ , song song với trục  $Ox$  và vuông góc với mặt phẳng  $(Q) : x + 2y - 3z + 1 = 0$ .
- Trong không gian  $Oxyz$ , tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng  $(P) : 2x + 2y - z + 1 = 0$ .
- Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P) : x + y + z + 2 = 0$ ,  $(Q) : x + y + z + 6 = 0$ . Chứng minh rằng hai mặt phẳng đã cho song song với nhau và tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó.
- Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P) : x + 3y - z = 0$ ,  $(Q) : x - y - 2z + 1 = 0$ .
  - Chứng minh rằng hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  vuông góc với nhau.
  - Tìm điểm  $M$  thuộc trục  $Ox$  và cách đều hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .
- Bác An dự định làm bốn mái của ngôi nhà sao cho chúng là bốn mặt bên của một hình chóp đều và các mái nhà kề nhau thì vuông góc với nhau. Hỏi ý tưởng trên có thực hiện được không?



Hình 5.15

- Trong không gian  $Oxyz$ , một ngôi nhà có sàn nhà thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$ , trần nhà tầng 1 thuộc mặt phẳng  $z - 1 = 0$ , mái nhà tầng 2 thuộc mặt phẳng  $x + y + 50z - 100 = 0$ . Hỏi trong ba mặt phẳng tương ứng chứa sàn nhà, trần tầng 1, mái tầng 2, hai mặt phẳng nào song song với nhau?

**5.10.** Xét một cối xay lúa trong không gian  $Oxyz$ , với đơn vị đo độ dài là mét. Nếu tác động vào tai cối xay lúa (ở vị trí  $P$ ) một lực  $\vec{F}$  thì moment lực  $\vec{M}$  được tính bởi công thức  $\vec{M} = [\vec{OP}, \vec{F}]$  (H.5.16). Trong quá trình xay, các thanh gỗ  $AB$  và  $PQ$  luôn có phương nằm ngang. Vector lực  $\vec{F}$  có giá song song với  $AB$ . Giải thích vì sao giá của vector moment lực  $\vec{M}$  có phương thẳng đứng.



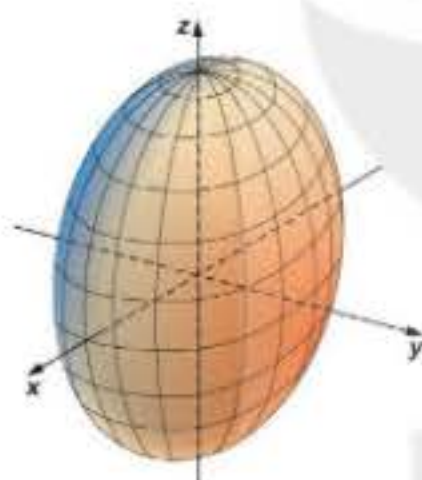
Hình 5.16

### Em có biết?

Hình học giải tích hay còn gọi là hình học tọa độ là lĩnh vực toán học dùng ngôn ngữ và phương pháp đại số để nghiên cứu hình học. Trong hình học giải tích, mỗi đối tượng hình học được cho tương ứng với một đối tượng đại số: điểm cho tương ứng với tọa độ của điểm, đường cho tương ứng với phương trình của đường, mặt cho tương ứng với phương trình của mặt. Ngoài phương trình mặt phẳng đã được trình bày ở bài học trên và phương trình mặt cầu sẽ được học trong Bài 17, sau đây là phương trình của một số mặt xuất hiện nhiều trong cuộc sống:

Mặt ellipsoid hay còn gọi là mặt trái xoan (H.5.17) có phương trình:

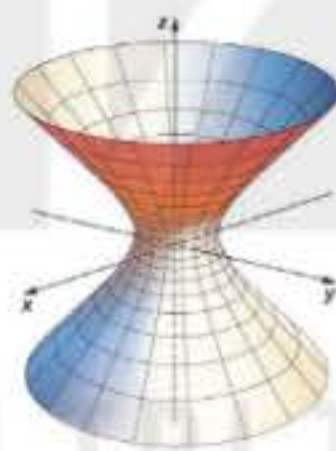
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Hình 5.17

Mặt hyperboloid một tầng (H.5.18) có phương trình:

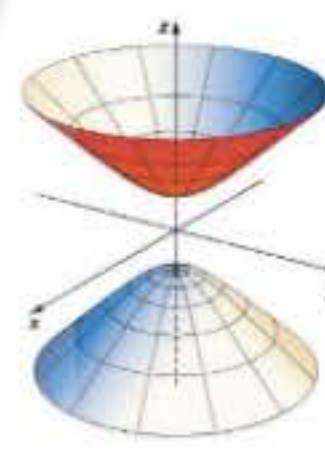
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Hình 5.18

Mặt hyperboloid hai tầng (H.5.19) có phương trình:

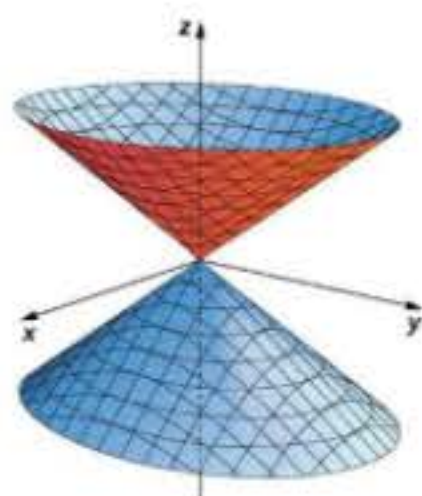
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Hình 5.19

Mặt nón elliptic (H.5.20) có phương trình:

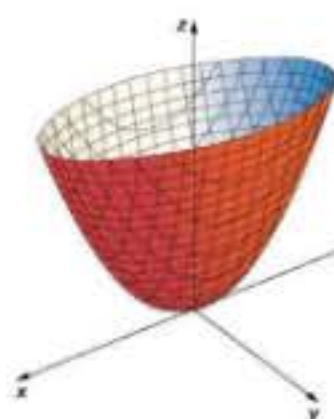
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



Hình 5.20

Mặt paraboloid elliptic (H.5.21) có phương trình:

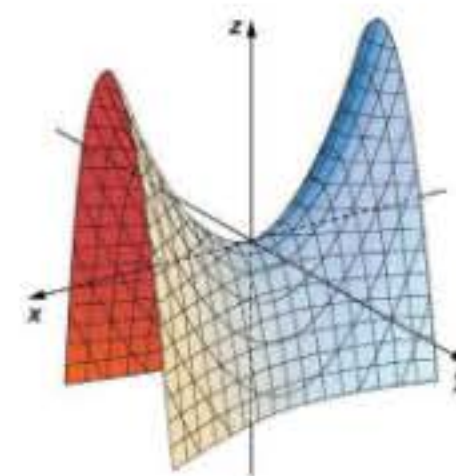
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$



Hình 5.21

Mặt paraboloid hyperbolic hay còn gọi là mặt yên ngựa (H.5.22) có phương trình:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$



Hình 5.22

( $a, b, c > 0$  và không bằng nhau.)