

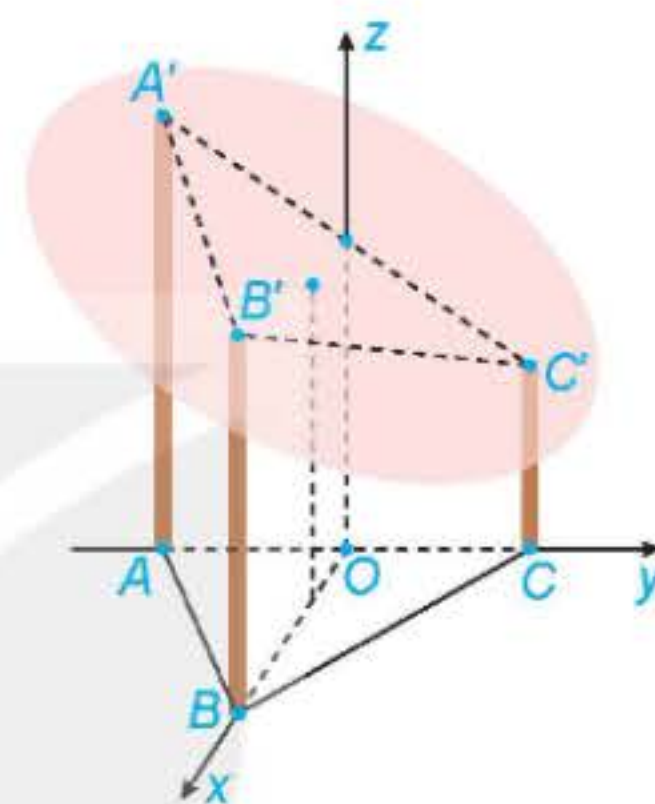
THUẬT NGỮ

- Góc giữa hai đường thẳng
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng
- Góc giữa hai mặt phẳng

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng.
- Vận dụng kiến thức về góc vào một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Một mái nhà hình tròn được đặt trên ba cây cột trụ (H.5.33). Các cây cột vuông góc với mặt sàn nhà phẳng và có độ cao lần lượt là 7 m, 6 m, 5 m. Ba chân cột là ba đỉnh của một tam giác đều trên mặt sàn nhà với cạnh dài 4 m. Hỏi mái nhà nghiêng so với mặt sàn nhà một góc bao nhiêu độ?



Hình 5.33

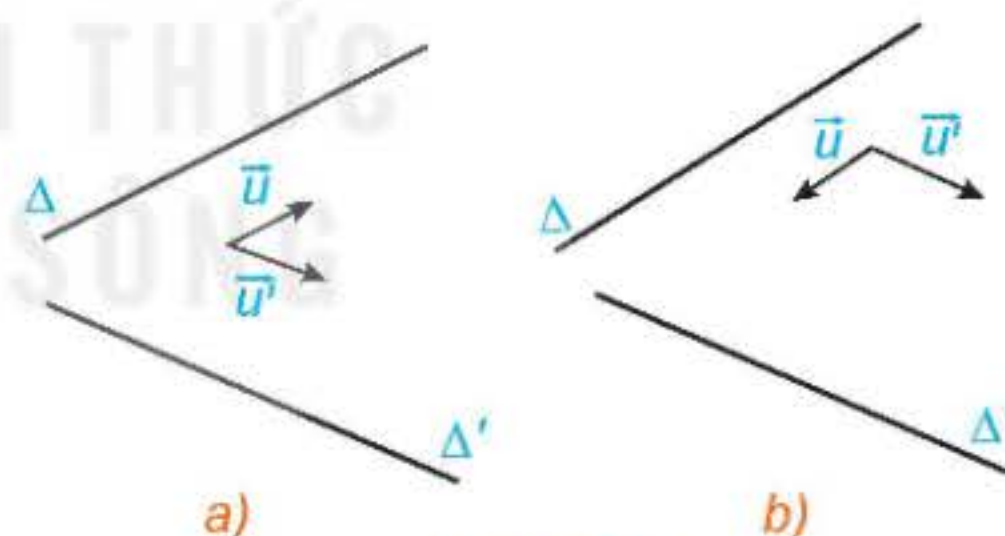
1. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

» **HĐ1.** Tìm mối quan hệ của góc giữa hai đường thẳng và góc giữa hai vector chỉ phương

Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng Δ và Δ' tương ứng có các vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$, $\vec{u}' = (a'; b'; c')$ (H.5.34).

a) Hãy tìm mối quan hệ giữa các góc (Δ, Δ') và $(\vec{u}, \vec{u}')$.

b) Có nhận xét gì về mối quan hệ giữa $\cos(\Delta, \Delta')$ và $|\cos(\vec{u}, \vec{u}')|$?



Hình 5.34

Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng Δ và Δ' tương ứng có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$, $\vec{u}' = (a'; b'; c')$. Khi đó:

$$\cos(\Delta, \Delta') = |\cos(\vec{u}, \vec{u}')| = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

» **Ví dụ 1.** Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai đường thẳng:

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases} \text{ và } \Delta': \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -2 + 2s \\ z = 4 + s. \end{cases}$$

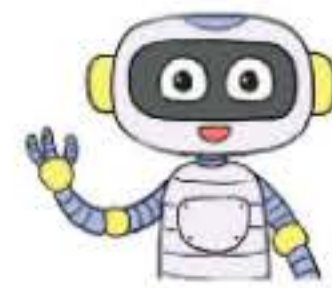
Giải

Hai đường thẳng Δ và Δ' tương ứng có các vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 0)$, $\vec{u}' = (2; 2; 1)$. Khi đó:

$$\cos(\Delta, \Delta') = |\cos(\vec{u}, \vec{u}')| = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy $(\Delta, \Delta') \approx 19,5^\circ$.

Trong bài học này, nếu không nói gì thêm, ta quy ước tính góc theo đơn vị độ và làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.



» **Luyện tập 1.** Trong không gian Oxyz, tính góc giữa trục Oz và đường thẳng

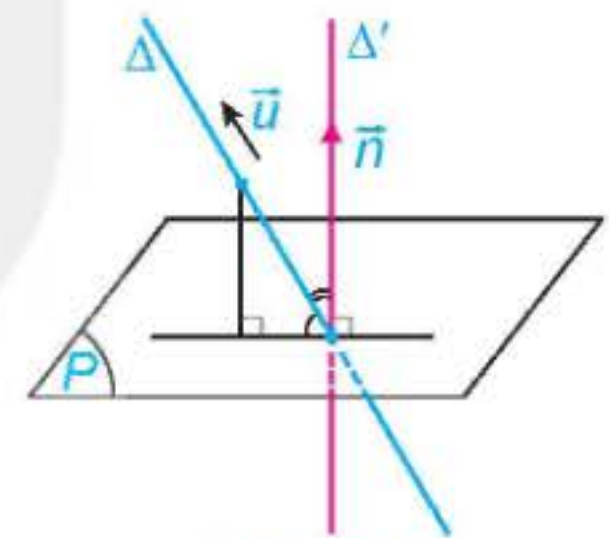
$$\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

2. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

» **HĐ2.** Tìm mối quan hệ của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng với góc giữa vector chỉ phương và vector pháp tuyến tương ứng

Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) . Xét $\vec{u} = (a; b; c)$ là một vector chỉ phương của Δ và $\vec{n} = (A; B; C)$ (với giá Δ) là một vector pháp tuyến của (P) . (H.5.35)

- Hãy tìm mối quan hệ giữa các góc $(\Delta, (P))$ và (Δ, Δ') .
- Có nhận xét gì về mối quan hệ giữa $\sin(\Delta, (P))$ và $|\cos(\vec{u}, \vec{n})|$?



Hình 5.35

Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó:

$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

» **Ví dụ 2.** Trong không gian Oxyz, tính góc tạo bởi trục Ox và mặt phẳng $(P): \sqrt{2}x - y + z + 2 = 0$.

Giải

Trục Ox có vector chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$, mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (\sqrt{2}; -1; 1)$. Ta có:

$$\sin(Ox, (P)) = \frac{|1 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy Ox tạo với (P) góc 45° .

» **Luyện tập 2.** Trong không gian Oxyz, tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) , với:

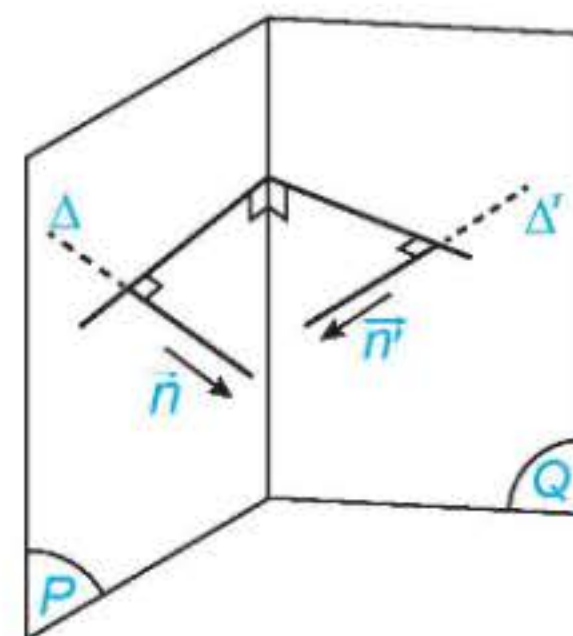
$$\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{1}, (P): x - y + z - 1 = 0.$$

3. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

» **H.03.** Tìm mối quan hệ của góc giữa hai mặt phẳng và góc giữa hai vectơ pháp tuyến

Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P), (Q) tương ứng có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n}' = (A'; B'; C')$. Lấy các đường thẳng Δ, Δ' tương ứng có vectơ chỉ phương $\vec{n}, \vec{n}'$. (H.5.36)

- Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) và góc giữa hai đường thẳng Δ và Δ' có mối quan hệ gì?
- Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).



Hình 5.36

Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P), (Q) tương ứng có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n}' = (A'; B'; C')$. Khi đó, góc giữa (P) và (Q), kí hiệu là $((P), (Q))$, được tính theo công thức:

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

» **Ví dụ 3.** Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai mặt phẳng (P) : $x + 2y + 2z - 1 = 0$ và (Q) : $x + y - z + 1 = 0$.

Giải

Các mặt phẳng (P), (Q) tương ứng có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; 2)$, $\vec{n}' = (1; 1; -1)$.

Ta có: $\cos((P), (Q)) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$

Do đó $((P), (Q)) \approx 78,9^\circ$.

» **Luyện tập 3.** Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai mặt phẳng (P) : $x - \sqrt{2}y + z - 2 = 0$ và (Oxz) : $y = 0$.

» **Ví dụ 4.** Trong không gian Oxyz, cho $A(0; 0; 4)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $D(3; 0; 0)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (ACD).

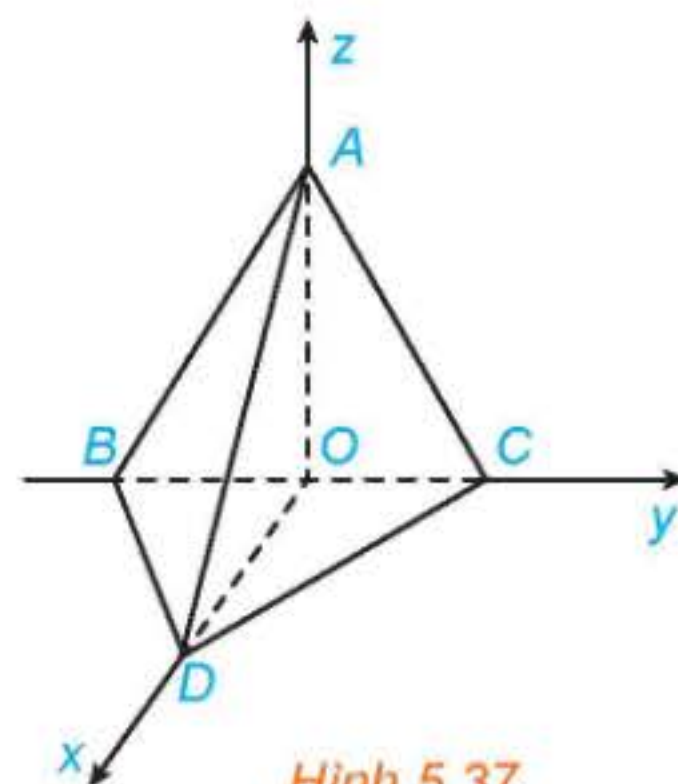
Giải (H.5.37)

Mặt phẳng (ABD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BD} = (3; 3; 0)$ và $\overrightarrow{AD} = (3; 0; -4)$.

Suy ra (ABD) có vectơ pháp tuyến $[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}] = (-12; 12; -9)$.

Do đó $\vec{n} = (-4; 4; -3)$ cũng là vectơ pháp tuyến của (ABD).

Mặt phẳng (ACD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AC} = (0; 3; -4)$ và $\overrightarrow{AD} = (3; 0; -4)$. Suy ra (ACD) có vectơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (-12; -12; -9)$. Do đó $\vec{m} = (4; 4; 3)$ cũng là vectơ pháp tuyến của (ACD).



Hình 5.37

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) . Khi đó:

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{m}) \right| = \frac{|-4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{9}{41}.$$

Vậy $\varphi \approx 77,3^\circ$.

» **Vận dụng.** Hãy trả lời câu hỏi đã được nêu ra trong tình huống mở đầu.

BÀI TẬP

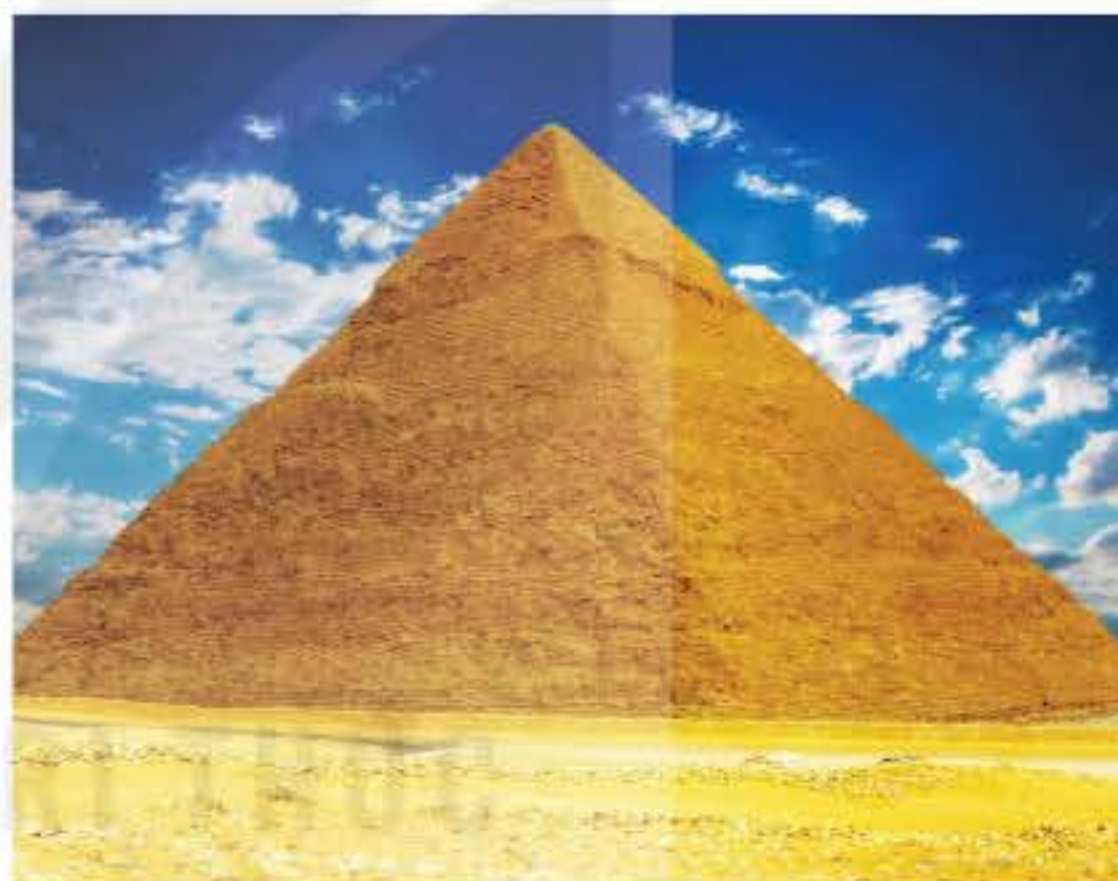
5.20. Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \frac{x-2}{-1} = \frac{x+1}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

5.21. Trong không gian Oxyz, tính góc giữa trục Oz và mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 1 = 0$.

5.22. Tính góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 3 = 0$.

5.23. Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông với cạnh dài 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài 219 m (theo *britannica.com*) (H.5.38). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) .

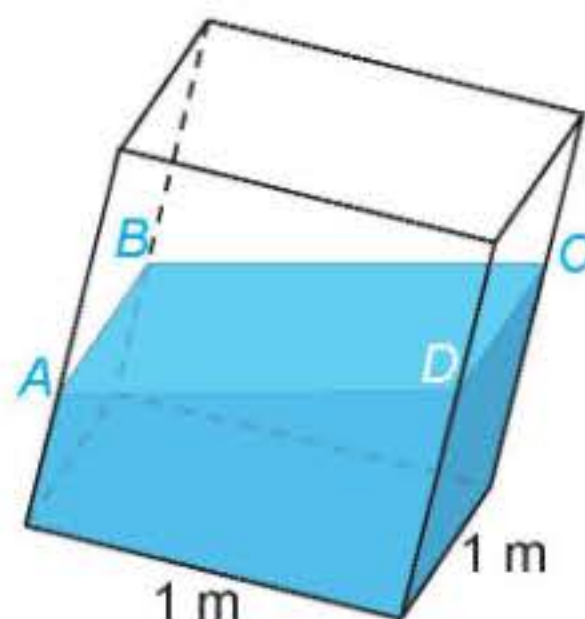
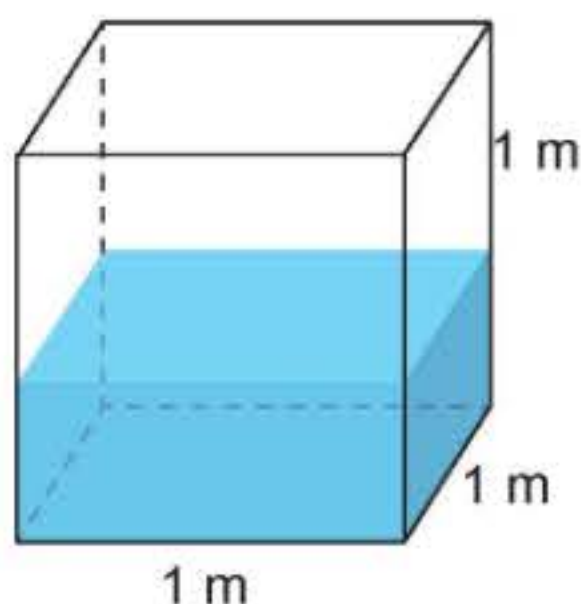


Hình 5.38. Kim tự tháp Kheops

5.24. (H.5.39) Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng, lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, B, C đến đáy bể tương ứng là 40 cm, 44 cm, 48 cm.

a) Khoảng cách từ điểm D đến đáy bể bằng bao nhiêu centimét? (Tính gần đúng, lấy giá trị nguyên.)

b) Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?



Hình 5.39